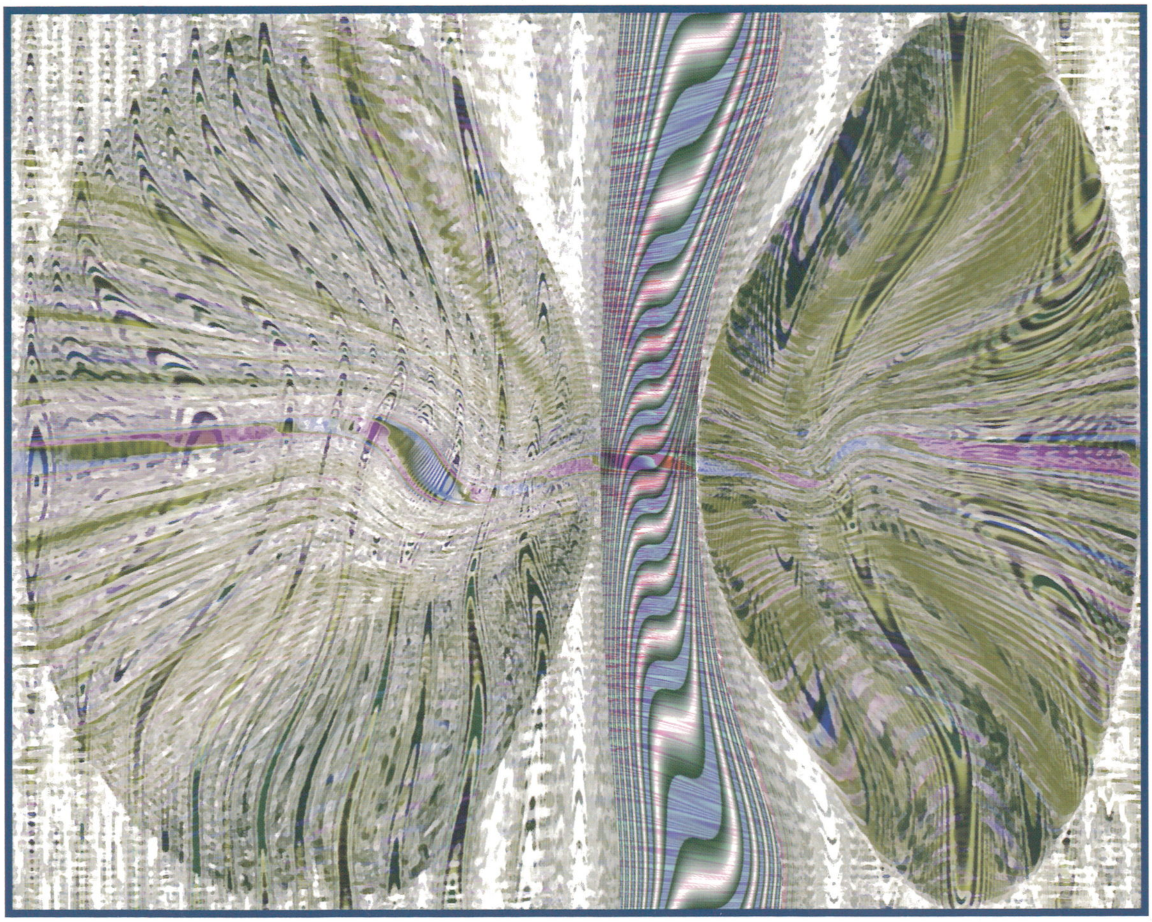
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年6月1日発行　第49巻6号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

6
2011

特集 物理イメージと数式表現
発想と思考の補助線をたどる



No.576

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 576 June 2011

物理イメージと数式表現

発想と思考の補助線をたどる

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2008年/5 省略
2008年/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念

数理科学臨時別冊一覧

10年/6 非線形現象と微分方程式
10年/7 数物系のための圏論
10年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎
11年/1 超弦理論の基礎
11年/3 繰りこみ群の物理と数理
11年/4 超重力理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

June 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 576

特集／物理イメージと数式表現

物理イメージと数式表現

発想と思考の補助線をたどる

和達　三樹

1. はじめに

昔，東京電力の広告イラストに次のようなものがあった．黄色の3角帽をかぶった少年が，少し傾きをもって張られたひもの上を，汗をかきながら走っている．これは，少年が電子，ひもが電線，という設定であろう．電流 = 電荷量 × 速度，であるから，数式表現の物理イメージといえる．大人になって思いかえしてみると“汗をかきながら”というのがミソで，会社はがんばって皆様に電力を送っているのですから，電力使用料のお支払は忘れずに，というメッセージのようにも読みとれる．より高尚な例をとると，一般相対性理論において，物体質量の周りの空間が，ゴム膜の上にボールを置いたようにひずんでいるとする図がある．もちろん数式での表現はもっと複雑なのであるが，空間のゆがみを直感的に理解する大きな助けになる．

学生諸氏にとって，授業，演習，実験と忙しく勉強する日々が続く．その中で，物理学における「数式表現」と「物理イメージ」を，どのように作り上げていくかは重要な課題である．本特集「物理イメージと数式表現―発想と思考の補助線をたどる」では，物理記号・数式表現と思考イメージの関連性を見ることで，数式表記の裏側に隠された発展の源と発想の極意に迫りたい．少し難しい言葉を連ねたが，物理学ではどのようなイメージを数式化したのか，または逆に，数式表現はどのような物理イメージを支えるのか，を紹介していきたい．

2. 微分，ベクトル

本特集の準備として，誰でもが習っている力学，電磁気学から始めよう．力学は，ニュートン（Isaac Newton, 1643–1727）によって創始された．運動する物体は絶えずその位置を変えている．ニュートンが導入した微分積分法の目的は，位置 $x(t)$ の連続的な時間変化を数学的に記述することに他ならない．ただし，著書『プリンシピア』においては，幾何学的説明が専ら用いられた．微分積分法のもう1人の発見者は，ライプニッツ（G.W. Leibnitz, 1646–1716）である．ニュートンとライプニッツの確執については，多くの記事があるので省くが，物理や数学における記号・記法について興味深い教訓を与えている．微分記号として，各々

$$\text{ニュートン}\ \dot{x}, \quad \text{ライプニッツ}\ \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

が用いられた．現在用いられる微分記号はライプニッツによることが多い．ライプニッツの記法は，数学的な一般化の見通しをよくするとともに，物

理イメージの助けになる．導関数 dx/dt を形式的に「無限小増分」dx, dt の商とみなすことにより，$v(t) = dx/dt$ を「瞬間の速さ」と解釈できる．

物理量には，速度，加速度，力，電場，磁場などのように，大きさと方向の両方によって指定される量がある．それらの量をベクトルという．ベクトルは，その長さが大きさに比例し，方向がベクトルの向きに一致する"矢"によって図示される．従って，ベクトル量のイメージを持つことは難しくない．一歩進んで，ベクトル関数の微分となると，理解の困難さは増す．

空間の各点 (x, y, z) にベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を指定するとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ が与えられたという．「場」については，次節で物理イメージを考察する．ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を成分で書くと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x,y,z) &= A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} \\ &\quad + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル（大きさ 1 のベクトル）である．ベクトルが物理量を表すのに便利であると同様に，偏微分 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ を x, y, z 成分とするベクトル演算子（デル演算子と呼ばれる）

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

は物理において非常に有用である．デル演算子をベクトル場に作用させることにより，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散（divergence），

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{4}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転（rotation），

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{5}$$

が導入される．少し数学的な準備を書いたのは，本特集の各記事で，このような演算とその拡張が用いられるであろうことを予期してのことである．

3. 電磁気学

電磁気学におけるマクスウェル方程式を例にとる．電場を $\boldsymbol{E}$，磁場（磁束密度）を $\boldsymbol{B}$，電荷密度を ρ，電流密度を $\boldsymbol{i}$，磁場の強さを $\boldsymbol{H}$，電束密度を $\boldsymbol{D}$，とする．これらの物理量は，場所 $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数である．電磁気学は，次の 4 つの基本方程式にまとめられる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \qquad \text{ガウスの法則,} \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \text{電磁誘導の法則,} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \text{磁気単極子の非存在,} \tag{8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i}, \qquad \text{アンペールの法則.} \tag{9}$$

電磁気学の基本法則をこの形に整理したのはマクスウェル（J.C. Maxwell, 1831–1879）自身ではなく，ヘビサイド（1885 年）やヘルツ（1890 年）の研究による．学部での電磁気学における目標の 1 つは，実験，現象に基づいてマクスウェル方程式を導出し理解することにある．複雑な電磁気諸現象が，たった 4 つの方程式にまとめられてしまうのは大きな驚きである．一方，マクスウェル方程式を見て，どのような物理が表現されているのか，答えられるであろうか．数式表現の物理イメージとしては，ベクトル $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{r})$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ がわき出し，吸いこみを表し，回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ が渦の強さを表すことを用いればよい（図 1）．例えば，(8) は磁場に関するガウスの法則であり，磁場のわき出しや吸いこみの源である磁荷（磁気単極子）が存在しないことを示している．

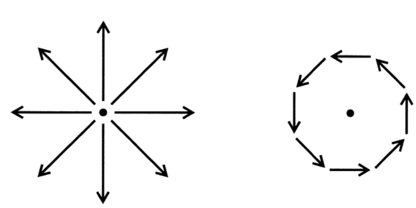


図 1　発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ と回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$.

ファラデー（M. Faraday, 1791–1867）は，電気の作用が電荷の間にある媒質（真空を含む）を順々に変えていくことによって伝わっていくものと考えた．「距離を隔てて直接作用する」とする考え方を遠隔作用論，「中間の媒質を通して力が作用する」とする考え方を近接作用論という．ファラデーは遠隔作用を好きではなかった．まさに，天才ファラデーの慧眼である．まず，力線が電荷や磁石の周囲の空間にあると考えた．磁力線は，磁石の上に置いた紙の上に鉄粉を撒くというおなじみの実験で見ることができる．これは，電荷や磁石の周囲の空間には，空間の各位置で定義された物理量，すなわち，「場」が存在することを意味する．力線は，接線の方向がその点の場の方向を向いている曲線である．

このファラデーの近接作用論を定式化したのがマクスウェルである．ファラデーが導入した場の概念は電磁気学を超え，今日では物理学の基本的な考え方になっている．ニュートン以来遠隔作用として扱われてきた万有引力も一般相対性理論によれば重力場を介在とする近接作用である．

4. 数学の使用と物理描像

物理学は，自然現象の観察 → 原理・法則の発見 → 基礎方程式の定式化 → 予測・制御，の一連の過程，または，その繰り返しによって発展してきた．実験の精密化，数学手法の適用と開発，がそれを支えている．一方，ファラデーの「場」のように，新しい物理概念の導入には，物理的イメージが必要である．興味深いことに，後年の発展から見ると，研究者が抱いていた物理イメージは必ずしも正しいものとは限らない．カルノー（S. Carnot, 1796–1832）は，熱機関（カルノーサイクル）の効率を解析した論文において，当時のカロリック（熱素）説を用いた．また，マクスウェルは電磁気現象に対して，流体力学を援用して，エーテルの渦モデルを考えた．

物理学が精密化し，また，微視的に進むとともに，数式表現と物理イメージの距離が広くなる傾向がある．例えば，量子力学において各現象の物理イメージを適切に持つことは難しい．ディラック（P. Dirac, 1902–1984）は，著書『The principles of quantum mechanics』の序文で，「新しい理論（量子力学）は学生が既に知っている事柄では説明できない，そして，言葉では全く十分には説明できない，物理概念に基づいている」と言っている．大家にそこまで極言されると困るのであるが，言葉や図示でイメージを構築する努力が必要であろう．近年の「量子情報」の研究で興味深いのは，重ね合わせの原理やエンタングルメント（量子もつれ）といった量子力学の不思議さが実験とともに議論できる点にある．科学技術の進歩は，量子力学自身の検証を可能にしつつあると感じる．

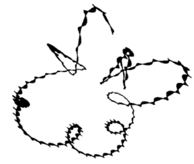
5. おわりに

大学に入り，勉強でやや暗い日々を過していたとき，ガモフ（G. Gamov, 1904–1968）の諸著作を知った．一般向けに書かれているが，内容はかなり高度のものを含んでいる．特に，『不思議な国のトムキンス』，『1, 2, 3 ⋯ 無限大』が記憶に残っている．これらでは，むしろ数式を用いずに物理や数学の真髄を伝えているが，一度勉強した後で読むと，頭の中で数式の物理イメージをさらに膨らませることができた．

授業においては，黒板に数式を書き連ねるということがよく起きるのは残念である．余裕を少し持ち，教員はその物理イメージを与えるよう配慮したい．学生諸氏も各自の学習において，数式とその計算とともに，物理的イメージを膨ませる試みを行なってほしい．本特集の各記事では多くの具体例が紹介されると思うが，物理学発展の歴史学ではなく，将来に向けてのメッセージが込められていることを読みとっていただきたい．

（わだち・みき，東京理科大学理学部）

ベクトルと四元数



吉田 春夫

1. はじめに

高等学校の数学で最初に登場するベクトルは大きさと方向を持った量（矢印）として定義され，その加法，減法が平行四辺形を用いて説明される．その次に 2 つのベクトルの積，すなわちスカラー積（内積）とベクトル積（外積）が定義され，種々の演習問題が課される．ところでベクトルの積はなぜ 2 通りあるのであろうか？ その問いに答えるには，ベクトルの故郷に立ち寄る必要がある．ベクトルの故郷は意外かも知れないが，複素数を拡張した四元数（しげんすう）なのである．

ベクトル（vector）という言葉を初めて用いたのはアイルランドの数学者ハミルトン（William Rowan Hamilton, 1805–1865）で，「運ぶもの」を意味するラテン語の vectum から作った造語である[*1)]．通常，ベクトルの説明には矢印と平行四辺形が描かれ，ベクトルの同等性やベクトルどうしの加減が述べられるが，ハミルトンの四元数の著書（『Elements of quaternions』，1866）の第 1 ページに描かれている図がまさにそれである．いきなり矢印の説明から入るその書はベクトルの故郷の資格を十分に備えている．

ただ今日の形でのベクトル解析はアメリカの物理学者ギブス（Josiah Willard Gibbs, 1839–1903）が創始したものであり，ハミルトンのオリジナルな形式とは少し異なる．以下にその歴史を少し述べてみたいと思う．今日のベクトルは掛けたり割ったりすることはできないが，ハミルトンが編み出したベクトルは自由に掛け算，割り算ができたのである．

*1) vector の「運ぶもの」の意味での使用は遺伝子工学の分野で用いられ，組換え DNA を増幅・維持・導入させる核酸分子を表す．日本語表記も「ベクター」である．

2. 複素数とガウス平面

平面内の点 (x, y) は複素数

$$z = x + yi \tag{1}$$

と対応づけられる．というよりむしろ「想像上の数」である虚数，複素数を視覚化するために平面内の点との対応が考えられた．この平面をガウス平面という．ガウス平面においては複素数に対する四則演算はすべて幾何学的に表現できる．実際

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

に対する四則演算の結果は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$

となるが，和と差は今日の意味でのベクトル (x_1, y_2) と (x_2, y_2) との和と差を表し，幾何学的にはガウス平面内の平行移動で表現できる．一方，

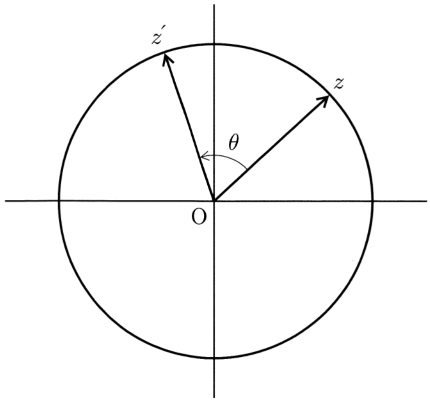


図 1　ガウス平面内の角度 θ の回転.

複素数の積と商は回転と伸縮を表す．具体的には複素数の極形式を用いて

$$z_1 = x_1 + y_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とするとき，その積は

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

となる．このことから複素数

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を掛けるという演算は，ガウス平面内で角度 θ の回転と r 倍の伸縮を合成したものであると見なすことができるのである．また z で割ることは角度 $(-\theta)$ の回転と r^{-1} 倍の伸縮になる．特に点 z を原点の周りに角度 θ だけ回転させる操作は，絶対値が 1 の複素数によって

$$z \to z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z \tag{2}$$

と表される（図 1）.

3. 四元数導入の動機

ハミルトンは複素数の四則演算を幾何学化したこのガウス平面を，3 次元に拡張することを試みた．ガウス平面の導入の動機とは逆に，3 次元空間内の点に対応して，その中で四則演算が可能な「数」を考えるためにである．当然，最初に考えつくのがガウス平面に垂直な方向に，もう一つの虚数単位 j を導入した三元数

$$x + yi + zj$$

を導入することであった．ここで当然ながら

$$i^2 = -1,\ \ j^2 = -1$$

を自然に要請する．しかしこの三元数において 2 つの異なる虚数単位の積 ij の扱いにおいて問題が生じた．

$$ij = 0,\ \ ji = 0$$

を課してみたり，より弱い条件である

$$ij + ji = 0$$

を課してみたりと，試行錯誤は続いた．そして最終的に 3 つの虚数単位 i, j, k を導入し，純虚数としての演算則

$$i^2 = -1,\ \ j^2 = -1,\ \ k^2 = -1$$

以外に非可換な

$$ij = -ji = k,\ \ jk = -kj = i,\ \ ki = -ik = j$$

という演算則を課した数の全体，

$$q = w + xi + yj + zk \tag{3}$$

を考えるというアイデアに到達した．これをハミルトンの**四元数**（quaternion）と呼ぶ．そして複素数の実部，虚部という呼び名に習い，四元数 (3) の w を**スカラー部**，$xi + yj + zk$ を**ベクトル部**と呼んだ．これが歴史上，ベクトルという言葉が最初に使われた瞬間である．複素数 (1) の場合とは異なり，四元数のベクトル部に 3 次元空間内の点 (x, y, z) を対応させたのである．

4. 四元数の演算と記法

2 つの四元数の間の四則演算はすべて基本演算規則から自動的に導かれる．実際

$$q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k,$$

$$q_2 = w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

に対して，その和と差

$$q_1 \pm q_2 = w_1 \pm w_2 + (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k$$

は当然であるが，その積も基本演算則から

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = & w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ & + (x_1 w_2 + w_1 x_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2)i \\ & + (y_1 w_2 + w_1 y_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2)j \\ & + (z_1 w_2 + w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)k \end{aligned}$$

として自動的に与えられる．商については後で述べる．またスカラー部がゼロの純虚四元数

$$xi + yj + zk$$

は単にベクトルと呼ばれた．

2 つのベクトルの和と差は再びベクトルとなるが，その積はベクトルとならずに四元数となる．実際

$$\alpha = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \ \ \beta = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

に対して，その積

$$\begin{aligned} \alpha\beta = & -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)i \\ & + (z_1 x_2 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)k \end{aligned}$$

はスカラー部を持つことになる．四元数 q のスカラー部，ベクトル部をそれぞれハミルトンに倣って $\boldsymbol{S}q, \boldsymbol{V}q$ と記せば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\alpha\beta &= -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ \boldsymbol{V}\alpha\beta &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)i \\ & \quad + (z_1 x_2 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)k \end{aligned}$$

である．スカラー部は現在のベクトル解析の記法による**スカラー積**（内積）の符号を変えたもの $-\alpha\cdot\beta$ であり，ベクトル部は**ベクトル積**（外積）$\alpha \times \beta$ そのままである．つまり関係式

$$\boldsymbol{S}\alpha\beta = -\alpha \cdot \beta,$$

および

$$\boldsymbol{V}\alpha\beta = \alpha \times \beta$$

が成り立つ．結局，2 つのベクトルの積 $\alpha\beta$ はギブス以降の現代的な表記を用いれば

$$\alpha\beta = -\alpha \cdot \beta + \alpha \times \beta \tag{4}$$

と表されることになる．

5. 四元数に対する他の演算

複素数 (1) に対して共役複素数 $\bar{z}$，絶対値 $|z|$ 等の役に立つ記法は四元数にも自然に拡張される．今，四元数

$$q = \boldsymbol{S}q + \boldsymbol{V}q = w + xi + yj + zk$$

に対し，その共役四元数 $\bar{q}$ を

$$\bar{q} = \boldsymbol{S}q - \boldsymbol{V}q = w - xi - yj - zk,$$

絶対値 $|q|$ を

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

で表すことにする．ちなみにハミルトン自身による記法は

$$\bar{q} \Rightarrow \boldsymbol{K}q, \ \ |q| \Rightarrow \boldsymbol{T}q$$

であった．また四元数 q に対して

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$$

で定義される逆数 q^{-1} は

$$q^{-1} = \frac{\boldsymbol{S}q - \boldsymbol{V}q}{|q|^2} = \frac{w - xi - yj - zk}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

で与えられることが確かめられる．特にベクトル $\alpha = xi + yj + zk$ の逆数

$$\alpha^{-1} = -\frac{\alpha}{|\alpha|^2} = -\frac{xi + yj + zk}{x^2 + y^2 + z^2}$$

は，向きが反対で大きさが逆数となるベクトルとなる．

このように四元数の逆数が与えられたのだから，2 つの四元数 q_1, q_2 の商も $q_1 q_2^{-1}$ あるいは $q_2^{-1} q_1$

として定義され，その結果も四元数となる*2)．このように四元数はその中で四則演算が閉じる体（たい）となっているのである．

6. 3次元空間内の回転

複素数を掛けるという演算が平面内の回転を表したように，四元数によって3次元空間内の回転が表現できる．詳細は他書[1~3]に譲るが結果だけ述べると次のようになる．

絶対値が1の3次元単位ベクトル

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

を回転軸として，ベクトル α を角度 θ だけ回転するという操作は，四元数

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + u \sin\frac{\theta}{2}$$

を用いて

$$\alpha \to \alpha' = q\alpha\bar{q} \tag{5}$$

と表現できる（図2）．これは平面内の回転を与える式(2)に対応するものである．また四元数 q_1 と四元数 q_2 で表現される回転をこの順で続けて行った結果は

$$\alpha \to \alpha' = q_2 q_1 \alpha \bar{q_1} \bar{q_2}$$

となる．なおベクトル u の絶対値が1でないときは，変換式(5)はより一般的な

$$\alpha \to \alpha' = q\alpha q^{-1}$$

になる．

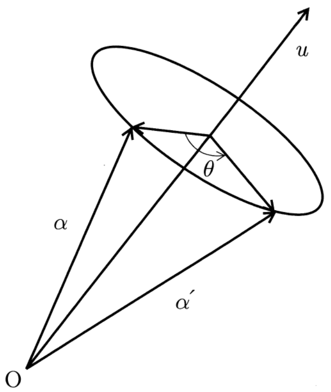


図2　3次元空間内のある軸の周りの角度 θ の回転．

7. ナブラ演算

流体力学や電磁気学では3次元空間内の点 (x, y, z) に連続的にスカラー関数 $u(x, y, z)$ やベクトル関数 $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ を対応させる必要が出てくる．前者をスカラー場と言い，温度，密度がその例である．ベクトル場と呼ばれる後者の例には速度場，電場，磁場がある．

ハミルトンは四元数の導入と共に，これらのスカラー場，ベクトル場に作用する重要な微分演算子である**ナブラ**を導入した．形式的にナブラは

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

と書けるベクトルである．3つの方向への偏微分を1つの記号でまとめて面倒みる役割がある．ナブラをスカラー関数 $u = u(x, y, z)$ に作用した結果は，ベクトルとスカラーの積なので再びベクトル

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{grad}\, u$$

になる．これはスカラー場の**勾配**（gradient）と呼ばれるベクトル場である．またナブラとベクトル場

$$\begin{aligned}\alpha(x, y, z) &= f(x, y, z)i \\ &\quad + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k\end{aligned}$$

の積は四元数となり，その結果は(4)より

$$\begin{aligned}\nabla\alpha &= -\nabla\cdot\alpha + \nabla\times\alpha \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)i \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)k \\ &= -\mathrm{div}\,\alpha + \mathrm{rot}\,\alpha\end{aligned}$$

である．この式のスカラー部の符号を変えたもの

*2) ただし非可換性から両者は異なるので $\frac{q_1}{q_2}$ という記法は適当でない．

div α が**発散**（divergence），ベクトル部 rot α が**回転**（rotation）と呼ばれるものである．つまり四元数表記では一つのベクトル場に対する発散と回転が，一つの四元数のスカラー部およびベクトル部として実現されてしまうのである．

8. ハミルトン以降

電磁気学を大成したマクスウェル（James Clerk Maxwell, 1831–1879）もハミルトンの後継者の一人と考えることができ，物理学上の結果を座標による形と四元数と双方の形式で表現した．四元数採用の目的は「空間内の点の 3 つの座標ではなくて空間内の点そのものへ，そして力の 3 つの成分ではなくてその大きさと向きへと我々の関心を直接むけること」であった．

しかしその後にギブスは，数としての乗算というアイデアを放棄し，ベクトル α, β に対する 2 つの積，すなわちスカラー積

$$\alpha \cdot \beta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

とベクトル積

$$\alpha \times \beta = (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k$$

を別々に定義し，四元数解析から生まれた他の概念を捨て去り（つまり良いとこ取りをして），今日の形でのベクトル解析を始めた．1881 年のことである．東京大学名誉教授の堀源一郎先生はその著[2]において

> 両者の決定的相違は，四元数があくまで“数”であるのに対し，ベクトルは数の体裁をかなぐり捨てて実用に徹した点にある．それが功を奏して現在，ベクトル解析は数学，物理学の広い分野で使われている．

と断じている．現代のベクトル解析におけるベクトルは自由に掛けたり割ったりすることができない．そのような規制がハミルトン流のベクトルに比べてある種の分かりやすさをもたらし，普及につながったことは歴史的な事実であろう．

9. 四元数復活の日？

インターネット上の検索エンジン Google 等で「四元数」あるいは「クオータニオン」を検索すると，多くのウェブサイトが表示される．その多くは変換式 (5) で与えられた 3 次元空間内の回転を説明したもので，実際のプログラム（ソースコード）を掲載したものも多い．従来のベクトル解析で 3 次元空間内の回転を実行するためには 3 つのオイラー角とそれを成分に持つ回転行列との積が必要になり，見通しが悪くなるばかりでなくメモリの消費量と計算時間により多くのコストがかかる．このため，特に自由な 3 次元回転が高速に求められるコンピュータ・グラフィクス（CG）の分野では四元数は必要不可欠な道具となっているようだ．

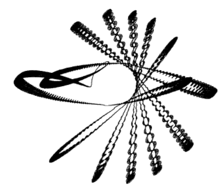
応用分野において，ギブスのベクトル解析の登場によって長く出番を失っていた四元数が，その誕生から 1 世紀半の後に先端技術で広く応用の道を見つけているのである．そして今後もより新たな応用分野を見つけていくことであろう．その過程で矢印ベクトルをイメージするのと同じぐらいの容易さで，四元数もイメージできるようになるかも知れない．

参考文献

1) 堀源一郎：『天体力学講義』，東京大学出版会 (1988).
2) 堀源一郎：『ハミルトンと四元数—人・数の体系・応用—』，海鳴社 (2007).
3) 金谷一朗：『3D-CG プログラマーのためのクォータニオン入門』，工学社 (2004).

（よしだ・はるお，国立天文台理論研究部）

解析力学と交換子



十河　清

1. はじめに

力学は17世紀英国のニュートンによって完成されたが，その後おもにドイツとフランスにおいて，オイラーとラグランジュなどによって数学的整備がなされた．その際に，微分積分法の整理にとどまらず，新しい概念である「変分」(variation) という考え方が導入された．この新しい装いをもった力学理論を総称して**解析力学** (analytical dynamics) という[1)]．

解析力学によれば，狭義の力学にとどまらず，光学や電磁気学から相対性理論や量子力学に至るまで，同一の方法（**変分原理**）によって定式化できる．このことは，真に驚くべきことである[2,3)]．

特に，量子力学に登場する「交換子」と解析力学の「ポアソン括弧」との類似に基づくディラックの理論によって，ハイゼンベルグの行列力学とシュレーディンガーの波動力学を包含する「量子力学の変換理論」が確立されたが，その際に解析力学が果たした役割はたいへん大きい．本稿の目的は，解析力学の基本的考え方を，簡単な例を通して紹介することである．

次の第2節で解析力学の概略を述べた後，第3節でポアソン括弧について少し詳しく説明した．最後に付録として，最近の話題である「シンプレクティック差分法」について紹介し，解析力学がまだまだ「終わっていない」現役の学問分野であることを強調したい．

2. 解析力学の形成と発展

2.1 オイラー・ラグランジュの運動方程式

簡単のため，質量 m を持つ粒子の1次元的運動を例に取ろう．ポテンシャル $U(x)$ の下でのニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -U'(x) \tag{2.1}$$

で与えられる．オイラーとラグランジュは，これを次のように書き換えた．位置 x と速度 $\dot{x}$ の関数

$$L(x,\ \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x) \tag{2.2}$$

をラグランジアンという (引き算である点に注意)．ラグランジアンはエネルギーの次元を持つが，全エネルギーではないのである．このとき，(2.1) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

と書き表すことができる．これを**オイラー・ラグランジュの方程式**という．実際

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -U'(x)$$

であるから，(2.3) は (2.1) と同じである．

ここまでなら，オイラー・ラグランジュ方程式 (2.3) は，単にニュートン方程式 (2.1) の書き換えであるにすぎない．重要なのは，それが変分原理により「導出できる」という事実にある．

すなわち，次のような積分

$$S = \int L(x,\ \dot{x})dt \tag{2.4}$$

を考え，これを作用積分（あるいはハミルトンの第一主関数）という．時間の関数として $x(t)$, $\dot{x}(t)$ を与えると定積分 S が決まるので，このような積分を汎関数（functional）という．汎関数とは，いわば「関数の関数」といっても良い．

さて，$x(t)$ を少し変えると（$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$, $\dot{x}(t) \to \dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)$），定積分 S も少し変わるであろう（$S \to S + \delta S$）．その変化分 δS を求めると（テイラー展開の 1 次まで）

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (L(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta\dot{x}) - L(x,\ \dot{x}))\,dt \\ &= \int dt\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right).\end{aligned}$$

そこで $\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x$ を用いて，右辺の第 2 項を部分積分する（ただし積分の上限・下限での値は固定：$\delta x|_{境界} = 0$ とする）．すると

$$\delta S = \int dt\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x \tag{2.5}$$

を得る．任意の変分 $\delta x(t)$ に対して，上式がゼロとなることを要請すれば，括弧内が恒等的にゼロとして，オイラー・ラグランジュ方程式が出てくる．言い換えると，オイラー・ラグランジュ方程式（すなわちニュートンの運動方程式）の解は，作用積分 S を最小（正確には「停留」）にするのである．そこで，これを**最小作用の原理**（principle of the least action）または**変分原理**という．

変分原理は，ライプニッツによる「我々の世界は有り得べき諸世界のなかで最善の世界である」という標語に淵源を持ち，フェルマー・モーペルチュイ・ダランベールらによって具体化されて来た．物理学理論の定式化法として普遍的な原理ではあるが，常識的にはたいへん奇妙な論題なので，『ダランベールの夢』や『カンディード』など，その世界観を揶揄した小説が書かれたりもしている．

オイラー・ラグランジュの方程式はニュートン方程式の書き換えにすぎないけれども，その長所として (1) 力学に限らず普遍的に適用できる，(2) 保存則が明示的にわかる，(3) 一般化座標でも同様に表現される，といったことが挙げられる．

ここでは (3) についての例を示しておこう．

（振り子の運動方程式） 角度 θ を力学変数に選ぶと，振り子の運動はラグランジアン

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) \tag{2.6}$$

により記述される．このときのオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ &\Longrightarrow\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\end{aligned} \tag{2.7}$$

のように全く同じ形式で書かれるので，運動方程式の導出がたいへん簡単になる．

2.2 ハミルトンの正準運動方程式

解析力学の次の発展は，英国のハミルトンとドイツのヤコビによる．ハミルトンは 1827 年に論文「光線系の理論」を書いて学会にデビューした．これは光学を変分原理で定式化したものである．以後これに対する「補追」としていくつかの連作論文を書き，1834 年には変分原理を力学全般に拡張した．これらの内容が「ハミルトンの原理」すなわち前述の最小作用の原理である．

参考までに書けば，光学の場合のそれは

$$\delta(所要時間) = \delta\int\frac{n(\boldsymbol{r})ds}{c} = 0 \tag{2.8}$$

で与えられる（フェルマーの原理）．ここで $n(\boldsymbol{r})$ は場所に依存した屈折率，積分は光線の経路に沿った積分（ds は線素）である．屈折率が n の媒質中の光速度は c/n であるから，積分は経路を通過するに要する時間を表している．

ハミルトンの創見は，互いに**正準共役**（canonical conjugate）な力学変数 x と p を用いたことである．ラグランジアンの $\dot{x}$ 微分

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2.9}$$

を座標 x に共役な運動量といい，

$$H(x,\ p) = p\dot{x} - L(x,\ \dot{x}) \tag{2.10}$$

をハミルトニアンという．ここで，右辺の $\dot{x}$ は

(2.9) を $\dot{x}$ に関して解き，変数 p と x で表したものを代入するのである．例えば (2.2) の場合は，$\dot{x}=p/m$ ゆえ

$$H=\frac{p^2}{2m}+U(x) \tag{2.11}$$

となる．

作用積分の変分を，ハミルトニアンを用いて実行すると

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int(\dot{x}p-H(x,\ p))\,dt\\&=\int dt\left(p\delta\dot{x}+\dot{x}\delta p-\frac{\partial H}{\partial x}\delta x-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right)\\&=\int dt\left[\delta p\left(\dot{x}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)-\delta x\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right]\end{aligned}$$

ゆえ $\delta S=0$ から以下の方程式を得る（特に H が (2.11) のとき）．

$$\frac{dx}{dt}=+\frac{\partial H}{\partial p}\quad\left(=\frac{p}{m}\right), \tag{2.12}$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}\quad(=-U'(x)). \tag{2.13}$$

これらをハミルトンの**正準運動方程式**という．オイラー・ラグランジュ方程式は座標 x に対する 2 階の微分方程式であるのに対して，ハミルトンの正準運動方程式は座標と運動量 $(x,\ p)$ に対する 1 階の連立微分方程式となっている．

2.3 ハミルトン・ヤコビ方程式

作用積分 S の変分の式を，微分形式に表せば

$$dS=pdx-Hdt \tag{2.14}$$

と書ける（変数 $x,\ t$ は作用積分の上限での値と考える）．これから

$$p=\frac{\partial S}{\partial x},\quad H=-\frac{\partial S}{\partial t} \tag{2.15}$$

となるので，座標 x と時間 t の関数としての作用積分 $S(x,\ t)$ は

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(x,\ \frac{\partial S}{\partial x},\ t\right)=0 \tag{2.16}$$

を満たす（ハミルトニアンが時間にあらわに依存する場合も含めた）．これを**ハミルトン・ヤコビの方程式**という．

ハミルトン・ヤコビ方程式の使い途については，「正準変換」と「変数分離」について述べた後に，いくつかの実例を示すべきであるが，すべて省略する[1]．ただし，正準変換については次節で「ポアソン括弧」と関連して説明しよう．

ヤコビは1842年に渡英してハミルトンとも会っている．ヤコビはその際のある会議の講演で「ハミルトンはあなた方の国のラグランジュである」と述べたという．これは，ラグランジュがオイラーの後継者と目されていた当時としては，最大級の賛辞である．

3. ポアソン括弧から量子力学的交換子へ

3.1 ポアソン括弧

座標と運動量の任意関数 $A(x,\ p),\ B(x,\ p)$ が与えられたとき

$$\{A,\ B\}=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial p} \tag{3.1}$$

を $A,\ B$ のポアソン括弧という．従って，特に

$$\{x,\ p\}=1, \tag{3.2}$$

$$\{x,\ x\}=0,\quad\{p,\ p\}=0 \tag{3.3}$$

が成り立つ．

さて，このとき $A(x,\ p)$ の時間変化は，変数 $x,\ p$ を通して変化するのだから

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}&=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial p}\frac{dp}{dt}\\&=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}=\{A,\ H\}\end{aligned}$$

のように，ハミルトニアンとのポアソン括弧で書けることがわかる（2行目の等号にハミルトンの正準運動方程式を用いている）．重要な結果なので，物理量 A が時間 t にあらわに依存する場合も含めた表式を改めて書いておこう．

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,\ H\}. \tag{3.4}$$

ここで特に $A=H$ と置けば，時間的に変化する外場がはたらいていないときは $dH/dt=0$ すなわちエネルギーは保存することがわかる．

3.2 ヤコビの恒等式

ポアソン括弧の定義式 (3.1) から，以下の性質が成り立つことが容易に確かめられる．

1. 反交換則：

$$\{A,\ B\} = -\{B,\ A\}. \tag{3.5}$$

2. 分配則：

$$\{AB,\ C\}=\{A,\ C\}B + A\{B,\ C\}. \tag{3.6}$$

3. 結合則：

$$\{A,\ \{B,\ C\}\} + \{B,\ \{C,\ A\}\} + \{C,\ \{A,\ B\}\} = 0. \tag{3.7}$$

特に最後の結合則は**「ヤコビの恒等式」**と呼ばれている．後に見るように，これら 3 つの性質を持つ「2 項の括弧式」は他にも存在し，逆にこれらを公理系に持つ「代数」を考えることもできる．ポアソン括弧を用いると，力学の問題を微分積分から解放し，代数の問題に帰着させることができるのである．その例をひとつ挙げておこう．

（角運動量の代数） 軌道角運動量ベクトル $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3)$ は

$$\begin{cases} L_1 = x_2p_3 - x_3p_2, \\ L_2 = x_3p_1 - x_1p_3, \\ L_3 = x_1p_2 - x_2p_1 \end{cases} \tag{3.8}$$

で定義されるが，これらの間のポアソン括弧は，（定義に従って微分を実行する代わりに）上記の諸性質を用いて，以下のように求めることもできる．

$$\begin{aligned}\{L_1,\ L_2\} &= \{x_2p_3 - x_3p_2,\ x_3p_1 - x_1p_3\} \\ &= x_2\{p_3,\ x_3\}p_1 + x_1\{x_3,\ p_3\}p_2 \\ &= x_1p_2 - x_2p_1 = L_3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

同様にして $\{L_2,\ L_3\} = L_1$，$\{L_3,\ L_1\} = L_2$ が示される．これらは角運動量の代数と呼ばれ，数学における「リー代数」のもっとも簡単な例になっている．

3.3 正準変換とネーターの定理

変数変換 $(x,\ p) \to (X,\ P)$ によって，ハミルトニアンも変換 $H(x,\ p) \to \tilde{H}(X,\ P)$ を受けるが，このとき

$$\frac{dX}{dt} = +\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial X} \tag{3.10}$$

が成り立つような変換を**正準変換**（canonical transformation）という．つまり，正準運動方程式が形式的に変わらない変換を正準変換というのである．

正準変換を構成するには，次のような母関数を用いるのが便利である．これは

> **ラグランジアンに時間の全微分を加えても，作用積分の変分（従って運動方程式）は変わらない**

という性質を利用するものである．

$$\begin{aligned} L &= \dot{x}p - H(x,\ p) \\ &= \dot{X}P - \tilde{H}(X,\ P) + \frac{dW}{dt}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

例えば $W(x,\ P,\ t)$ とするとき，等式

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial P}\dot{P}$$

を使えば，(3.11) より

$$p = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad X = \frac{\partial W}{\partial P}, \tag{3.12}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{3.13}$$

を得る．このような W を母関数というのである．

特に $W = xP$ のときは

$$X = \frac{\partial W}{\partial P} = x, \quad p = \frac{\partial W}{\partial x} = P, \quad \tilde{H} = H$$

であるから，これは恒等変換である．

そこで，ϵ を微小パラメータとして，恒等変換と少しだけ違う正準変換

$$W = xP + \epsilon G(x,\ P) \tag{3.14}$$

を考える．このような G を**無限小変換の生成子**（generator）という．このとき (3.12) より

$$X = x + \epsilon\frac{\partial G}{\partial p}, \quad P = p - \epsilon\frac{\partial G}{\partial x} \tag{3.15}$$

を得る．ここで，ϵ の最低次（1 次）までを残す意味で，G と微分の変数 P を p に置き換えている．

無限小変換の典型例をいくつか挙げておこう．

(空間並進) 空間並進 $x \to X = x + \epsilon$ を生成する母関数は $W = xP + \epsilon P$ である．すなわち，**空間並進の生成子は運動量**である．

(空間回転) 空間回転 $x_1 \to X_1 = x_1 - \epsilon x_2$, $x_2 \to X_2 = x_2 + \epsilon x_1$ を生成する母関数は $W = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \epsilon(x_1 P_2 - x_2 P_1)$ である．しかるに，$x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_3$ であるから，**空間回転の生成子は角運動量**である．

(時間並進) 時間並進 $t \to T = t + \epsilon$ を生成する母関数は，ϵ の最低次（1 次）で

$$x(t+\epsilon) - x(t) = \epsilon \dot{x} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$p(t+\epsilon) - p(t) = \epsilon \dot{p} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial x}$$

であるから，**時間並進の生成子はハミルトニアン**である．

次に，ポアソン括弧が正準変換で変わらないことを示そう．関係式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \left(1 + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p}\right)\frac{\partial}{\partial X} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial P}, \\ \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\frac{\partial}{\partial X} + \left(1 - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial p}\right)\frac{\partial}{\partial P}\end{aligned}$$

を使えば，以下を得る．

$$\begin{aligned}\{A,\ B\}_{xp} &= \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial p} \\ &= \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial B}{\partial P} - \frac{\partial B}{\partial X}\frac{\partial A}{\partial P} + O(\epsilon^2) \\ &= \{A,\ B\}_{XP} + O(\epsilon^2). \quad (3.16)\end{aligned}$$

微小パラメータ ϵ の 1 次の項は打ち消し合うのである．この結果は，ポアソン括弧が正準変換で変わらないことを意味している．

さらに，任意の関数 F について，テイラー展開を使えば，以下の等式が成り立つことが示される．

$$F(X,\ P) = F(x,\ p) + \epsilon\{F,\ G\} \qquad (3.17)$$

ここで特に $F = H$ とすると，$\{H,\ G\} = -dG/dt$ であるから

$$H(X,\ P) = H(x,\ p) - \epsilon \frac{dG}{dt}. \qquad (3.18)$$

従って，特に

ハミルトニアンが無限小変換 G で不変ならば，物理量 G は保存する

ことがわかる（$H(X,\ P) = H(x,\ p)$ ならば $dG/dt = 0$）．これを**「ネーターの定理」**という．

E. ネーターはヒルベルトの薫陶を受けた女性数学者で，抽象代数学分野に大きな業績を残した．この定理は，一般相対性理論に関連してヒルベルトから出された問題に対する解答として提出されたという．

3.4 ディラックの変換理論

ハイゼンベルグの量子力学（行列力学）においては，交換関係

$$[\hat{x},\ \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \qquad (3.19)$$

が重要な役割を果たす．ディラックは先生のファウラーからハイゼンベルグのこの論文を渡されて読んだ際に，ポアソン括弧との類似に気付いたのだという．このときの経緯は文献4) におもしろく書かれている．

ディラックが気付いた類似とは，対応

$$[\hat{x},\ \hat{p}] = i\hbar \iff \{x,\ p\} = 1$$

である．そこで，ディラックは「c 数」（古典論的物理量）と「q 数」（量子論的物理量）という概念を導入して，両者の間に対応原理

$$[\hat{A},\ \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar\{A,\ B\} \quad (3.20)$$

を想定したのである．これによって，目的の古典力学系を量子力学に翻訳することが可能になる[5]．

特に，既述の（古典的）「正準変換の理論」の量子力学版 $\hat{x} \to \hat{X}$, $\hat{p} \to \hat{P}$ は，ユニタリ演算子（ユニタリ行列）U を用いて

$$\hat{X} = U^{-1}\hat{x}U, \quad \hat{P} = U^{-1}\hat{p}U \qquad (3.21)$$

と表現される．これが**量子力学的変換理論**である．

特に，シュレーディンガー方程式とハイゼンベルグの運動方程式とは，ユニタリ演算子

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \qquad (3.22)$$

を介して

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \psi(t) = U(t)\psi(0), \quad (3.23)$$

および

$$i\hbar\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = [\hat{A},\ \hat{H}] \qquad (3.24)$$

によって相互に関係している．ここで，$\hat{A}$ は $\hat{a}$ をシュレーディンガー表示の演算子として

$$\hat{A}(t) \equiv U(t)^{-1}\hat{a}U(t) \qquad (3.25)$$

で定義される．

4. おわりに

表題の「解析力学と交換子」に関して取り上げるべき話題は，大筋としてあらかた触れることができたと思う．足りないのは，いろいろな実例を通して内容の肉付けをすることである．それらについては，教科書や参考文献を参照してほしい．

以下，紙幅の残りで**「シンプレクティック差分法」**について紹介したい．これはコンピュータを用いて統計力学を研究する「分子動力学」において，粒子の運動を時間について離散的な方程式で近似する際に生じる問題である．この場合，本文で考察した無限小変換ではなく，有限な時間刻み h でなおかつ正準変換となるような差分方程式が望ましい．そのような離散化法を「シンプレクティック差分法」という．ポアソン括弧の構造を保つことをシンプレクティック（symplectic）と名付けたのはワイルであるが，最初は「コンプレックス」であったのを，複素数と混同されることから現在の名前にしたのだという．

シンプレクティック差分法の実例を挙げよう．

（例 1） 調和振動子

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 x^2\right), \qquad (4.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 x \qquad (4.2)$$

を時間離散化（$t = nh$）した差分方程式は $c = \cos(h\omega)$, $s = \sin(h\omega)$ として

$$\begin{cases} p^{n+1} = c \cdot p^n - \omega s \cdot x^n, \\ x^{n+1} = \omega^{-1} s \cdot p^n + c \cdot x^n \end{cases} \tag{4.3}$$

で与えられる．このとき，ポアソン括弧は

$$\begin{aligned} &\{x^{n+1},\ p^{n+1}\} \\ &= \{\omega^{-1} sp^n + cx^n,\ cp^n - \omega sx^n\} \\ &= c^2\{x^n,\ p^n\} - s^2\{p^n,\ x^n\} \\ &= \{x^n,\ p^n\} = 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

のように，各時刻で満たされているので，(4.3) は離散的正準変換ということができる．

（例 2） リープフロッグ（leapfrog）法

正準運動方程式

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -U'(x) \equiv a(x) \tag{4.5}$$

の差分化

$$\begin{cases} p^{n+\frac{1}{2}} = p^n + \dfrac{h}{2} \cdot a(x^n), \\ x^{n+1} = x^n + h \cdot p^{n+\frac{1}{2}}, \\ p^{n+1} = p^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{h}{2} \cdot a(x^{n+1}) \end{cases} \tag{4.6}$$

をリープフロッグ法という．このときも，直接の計算によってポアソン括弧の関係

$$\{x^{n+1},\ p^{n+1}\} = \{x^n,\ p^n\} = 1 \tag{4.7}$$

が示される．時折「$O(h^2)$ で成立」とされることがあるが，正確に成り立つのである．

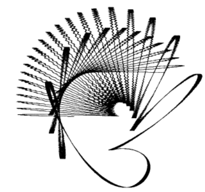
参考文献

1) L.D. ランダウ，E.M. リフシッツ，『力学』（東京図書，1970）．
2) W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (Dover, 1968).
3) C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Dover, 1986).
4) P.A.M. ディラック，「理論物理学の方法」; W. ハイゼンベルグほか著，青木薫訳『物理学に生きて』（筑摩学芸文庫，2008）に所収．
5) B.L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (Dover, 1968).

（そごう・きよし，北里大学理学部）

熱統計力学における物理イメージと数式表現

状態量とエントロピー



宮下 精二

熱力学を習うとき，最初に熱力学の第一法則として

$$dU = \varDelta W + \varDelta Q \tag{1}$$

なる式が出てくる．ここで，dU は内部エネルギーの全微分で，熱とか仕事とかは状態量でないため d が使えないということが説明される．そのため，ここではそれらの微小変化量を $\varDelta$ を用いて表している．このあたりから熱力学の‘神秘性’が始まり，論理を駆使した抽象的な説明に加えて，偏微分の‘華麗（？）’な変形で，熱力学が極めて面倒くさい学問というイメージが確立するのではないだろうか．本稿では，ここで出てくる状態量という考え方，その取扱い方，および熱力学に特有なエントロピーについて考察してみたい．

状態量という考え方は，状態を与えるとそれだけで決まっている量ということである．その意味ではごく普通の量であるが，状態の変化ということを考えると任意の2つの状態をどのような経緯で移っても同じ変化を示さなくてはならないという条件が課される．力学でポテンシャルエネルギー（位置のエネルギー）が導入されたとき，「保存力」という考え方が強調されたのはこの条件を満たすためであった．実際，保存力でない場合はほとんど考えないので，保存力であることはあまり意識をしなかった．そこでは，仕事はポテンシャルエネルギーの差であるためほとんどポテンシャルエネルギーと同一視され，状態量でないなどと強調されることはなかった．しかし，熱力学では，力学では存在しない熱というエネルギー形態があり，その部分には通常の力学法則が適用できないため特別に扱わなくてはならない事情がある．そのため，内部エネルギーの変化を力学でいうところの仕事とそれ以外の熱に分けて考えなくてはならず，その違いが強調されるのである．

私自身の経験として，この部分を熱力学で習ったとき，‘熱’という量の説明は，「熱」量なるものを熱素として考えてはいけないとの説明だけが印象に残り，状態量でない量は何かうさんくさい量との印象を持っていた．しかし，熱はともかく，仕事は力学で習ったときはまっとうな量で力 × 距離で与えられた．熱力学でも

$$\varDelta W = -PdV \tag{2}$$

であり，ここで圧力 P も体積 V も立派な状態量であり，この組合せは決してうさんくさくはない．実際，仕事はエネルギーの変化量でエネルギー自身ではない．問題は**状態自身が元に戻るときの全過程での総仕事量**がどうなるかである．力学では保存力の場合，状態が元に戻れば，その過程での総仕事量は0になった．例えばバネの場合，自然長からのずれを x とすると，x を x_1 から x_2 に変えるときの仕事はバネ定数を k として

$$\varDelta W_{x_1 \to x_2} = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) \tag{3}$$

で与えられ，x が元に戻ると総仕事量は

$$\oint \Delta W = \Delta W_{x_1 \to x_2} + \Delta W_{x_2 \to x_1} = 0 \quad (4)$$

である．このことは仕事にいろいろな種類があっても同様である．例えばバネを重力下に置くと位置のエネルギー mzg（ここで z は高さ）や，粒子が電荷を持っている場合には電場による仕事 $-Ey$ なども考えられる．この場合

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}kx^2 - Ey + mgz \qquad (5)$$

であり，粒子の位置を変えるのに必要な仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W &= kxdx + Edy + mgdz \\ &= U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z) \end{aligned} \qquad (6)$$

と書ける．そのため，自明に

$$\oint \Delta W = 0 \qquad (7)$$

である．ここでは $U(x)$ が状態量であり，仕事はその差であるが，原点を決めておけば状態量と同じ変化をするので，特にそれらの違いは意識しなかった．

それに対し，熱力学で総仕事量が0でないことは図1に示すようなサイクルを用いて説明される．ここで，A→B は等温（$T = T_1$）で系を減圧する過程，B→C は等圧（$P = P_{\mathrm{B}}$）で膨張させる過程，そして C→D は等温（$T = T_2$）で圧縮する過程，D→A は等圧（$P = P_{\mathrm{A}}$）で圧縮する過程である*1)．このサイクルでの系がされた仕事を考えると

$$\begin{aligned} \Delta W = &\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (-P)dV + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} (-P)dV \\ &+ \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} (-P)dV + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} (-P)dV \neq 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

であり，この量はサイクルの面積で与えられ，明らかに0ではない．つまり，仕事に対応する状態量はない．

*1) 等温での体積と圧力の関係は，例えば理想気体では

$$PV = nRT \qquad (8)$$

で与えられる．ここで n は粒子数をモルの単位 (6.03×10^{23}) で計ったもの，また R は気体定数と呼ばれる定数である．

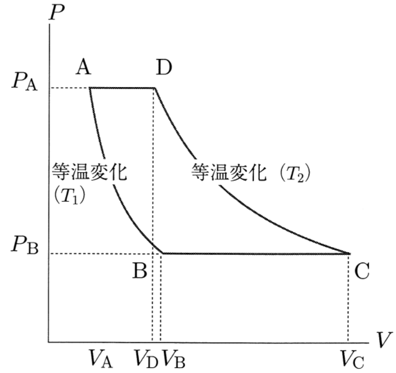


図1 サイクル．

以上の2つの場合で何が違っているかを考えてみよう．ピストンの場合でも例えばCA間でのみ状態を変化させると，

$$\Delta W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} (-P)dV + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}} (-P)dV = 0 \qquad (10)$$

であり，仕事はある状態量の差になる．AB間，CD間でも同様である．つまり，BC間，あるいはDA間で何かが起こっているのである．そこでは考えている変数（P, V）以外の変化に伴う‘エネルギーの出入り’があり，それを見落としている．そのため仕事を簡単に状態量の差といえなくなっている*2)．

*2) 見落としている過程があると総仕事量が0にならない，簡単な例として，次のようなサイクルを考えよう．状態 A では箱は高さ h_{A} にあり，系には粒子 N_{A} 個があるとする．力学によると高さ h にある粒子一つあたりの位置のエネルギーは，粒子の質量を m として $U(h) = mgh$ である．この箱を高さ h_{B} に移動させる．この間に箱の移動によってできる仕事は

$$\Delta W_{\mathrm{AB}} = (N_{\mathrm{A}}m + M)g(h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}) \qquad (11)$$

である．ここで M は箱の質量である．そのまま，A に戻すとそれに必要な仕事は ΔW_{AB} であり，状態は元に戻る．しかし，状態 B で，粒子を n 個箱から出し粒子を $N_{\mathrm{B}} = N_{\mathrm{A}} - n$ 個にして，高さ h_{A} に戻す．このとき必要な仕事は $\Delta W_{\mathrm{CD}} = (N_{\mathrm{B}}m + M)g(h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}})$ であり，この間に取り出せた全仕事は $\Delta W_{\mathrm{AB}} - \Delta W_{\mathrm{CD}} = nmgh$ となる．高さ h_{A} で粒子を n 個入れると，もとの状態 A に戻るが，このサイクルで $nmgh$ の仕事が取り出せた．これはとりもなおさず，高さ h_{A} から高さ h_{B} に n の粒子が降りたことによる位置のエネルギーである．しかし，粒子の積み卸しを忘れ，箱のする仕事だけを考えると，系はもとに戻ったにも関わらず仕事が取り出せたように見え，仕事が状態量

ここで見落としているエネルギーの出入りが'熱'の出入りである．それを ΔQ と書くと

$$\Delta Q = dU + PdV \tag{12}$$

となる．ここで $-PdV$ は仕事として認識されているエネルギー変化を代表している．

熱力学の定式化の最も重要な点は，この見えない量に対し，熱力学の第2法則から導かれるいろいろな帰結を用い，また温度を適切に定義することで

$$\frac{\Delta Q}{T} = dS \tag{13}$$

状態量であることが示すことである[1]．この S が**エントロピー**である[*3]．これを用いると熱力学の第一法則で導入された内部エネルギー U は，仕事の代表として上で考えた $-PdV$ を用い，また粒子数の変化に必要なエネルギーを化学ポテンシャル μ で表すと

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \tag{14}$$

となる．この表式は熱力学のすべての内容を含んでおり，**熱力学の基礎方程式**というべきものである．

実際にここから具体的な諸性質を導出するには数学的な技法が必要となる．その技法の重要なものの一つに'**偏微分**'がある．その方法を見ておこう．偏微分は，多変数関数 $f(x, y, z, \cdots)$ に関して一つの変数，例えば x を選び，他の変数 $(y, z, \cdots)$ を固定して x に関して微分することで特に難しくはない．実際，波動方程式などでは普通に出てくるものである．そこでは x で偏微分するとき，y, z, t が固定されていることは自明なので特に断らなかった．

しかし，熱力学では，固定する量がいろいろ変わるのでそれを指定する必要が出てくる．エントロピーと粒子数を一定にして（粒子の出入りのない系を断熱的に変化させること），体積を変化させたときの内部エネルギーの変化は，(14) より

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -P \tag{15}$$

となり，圧力で表せることがわかる．しかし，系を温度 T の熱浴に接して温度を一定に保ちながら変化させる場合には，固定すべき量は S ではなく T である．そのため，この場合の内部エネルギーの変化は

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} \tag{16}$$

と表される．この量は (15) の場合とは異なり，簡単に $-P$ とはならない．この量と $-P$ の関係を求めてみよう．偏微分の一般関係として以下の関係がある．ある関数 f が独立変数 x, y, z の関数であるとき，新しい変数として $t(x, y, z)$ を導入し，それを一定にして微分したい場合

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{t,z} + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial t}\right)_{x,z}\left(\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x}\right)_{y,z} \tag{17}$$

と書ける[*4]．ここではすべての関数は微分でき，また逆関数があるとしている．ここで $f = U, x =$

の差で書けなくなる．つまり，本来保存されるエネルギーの変化は，その過程に必要なすべての仕事を考えなくてはならないというのが熱力学の第一法則である．

図1のサイクルでは粒子数の代わりに，熱という見えない量によるエネルギー移動がある．熱の動きは，温度という因子に作用され粒子の場合と質的に異なる．しかし，それが (13) の形で全微分の形で表せる．

*3) この関係は，カルノーサイクルを用いた議論や，カラテオドリの理論と呼ばれる多変数関数に関する性質を用いて定式化される．この部分は割愛する．

*4) 状態が熱平衡状態にあり，ある一つの相にあるときはこれらの条件は満たされる．

$$df = \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)_x dt \tag{18}$$

に

$$dt = \left(\frac{\partial t(x,y)}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}\right)_x dy \tag{19}$$

を代入し $dy = 0$ とすれば関係 (17) が得られる．

上に示した (17) の他に，重要な偏微分の公式として以下のものがある．

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x(y,f)}{\partial y}\right)_f \left(\frac{\partial y(f,x)}{\partial f}\right)_x = -1. \tag{20}$$

この公式は

$$df = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x dy \tag{21}$$

において，全体を dx で割って，$df = 0$ とすれば求められる．

$V, y = S, t = T, y = N$ とすると

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} \tag{22}$$

であるので,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -P, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = T \tag{23}$$

を用いると

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = -P + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} \tag{24}$$

となる．つまり，右辺第二項だけ違う．

また，状態量である条件で全微分可能性の条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x\right)_y \tag{25}$$

から一見自明ではない恒等式が導かれる．例えば，この関係を，独立変数が T, V, N である $f = F = (U - TS)$ に適用すると，(14) から $dF = -SdT - PdV + \mu dN$ であるので

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \tag{26}$$

が得られる．この種の関係をマクスウェルの関係式という．

これを (24) に用いると

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \tag{27}$$

が得られる．この関係はエネルギー方程式と呼ばれ，温度一定の下での，内部エネルギーの圧力，温度，体積への依存性を与える関係である．上の導出からわかるように，この関係は熱力学の基礎方程式 (14) からの直接の帰結であり，個別の物質には依らない．

例えば，この関係 (27) を理想気体に適用すると，理想気体の状態方程式 (8) を用いて，理想気体の性質であるジュールの法則

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = 0 \tag{28}$$

が得られる．

このように，何を止めるか，つまり，等エント

ロピー過程（通常，断熱過程と呼ぶ．S：一定)，等積過程（V：一定)，等圧過程（P：一定)，粒子数一定（N：一定)，化学ポテンシャル一定（μ：一定）などいろいろなケースが考えられ，それぞれの関係をつけようとするために，上に出したような偏微分の関係を駆使しなくてはならない*5)．

このように，熱力学では，若干煩雑な数学的技法のため，熱力学の本来的な面白さが見失われるおそれがあるが熱力学の法則は基礎方程式(14)で尽くされており，肝心な点はエントロピーという状態量が存在したことである．そこで，このエントロピーという状態量についてもう少し考えたみたい[2)]．

圧力などの量はそれなりにイメージができるがエントロピーはなかなかイメージがつかみにくい．熱力学では熱は，**‘把握できない’エネルギー**という恣意的な定義がなされている．このことから想像できるように，エントロピーは認識ということと深く関連している．このことはミクロからの熱力学の理解である統計力学でのエントロピーの定義（ボルツマンの原理*6)）

$$S(E) = k_{\mathrm{B}} \ln W, \quad W(E): \text{エネルギー } E \text{ をもつ状態数} \tag{31}$$

に現れる．ここでエントロピーを与えているのは，区別できない状態の数 W である．上の式では区別できない状態の例として同じエネルギーをもつ状態を考えている．もし，同じエネルギーを持つ状態でも，区別できるグループに分けられる場合はそれぞれのグループの状態数がそれぞれのグループのエントロピーとなる．いずれにしても，$\ln W$ は数の関数であるので無次元量である．粒子数 N も無次元量であったが，エネルギーへの寄与は一粒子あたりのエネルギーを化学ポテンシャル μ として，μN の形で与えられた．その場合には特に違和感はなかったが，エントロピーの場合は粒子などの数自身ではなく，**状態の数**であるので不思議な量である．

見方を変えると，エントロピー/k_{B} にあえて単位を考えると，それは情報量の単位ということができるかもしれない．実際，一般の分布における情報量の指標は Shannon エントロピーとして

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i \tag{32}$$

で扱われることが多い．もちろんこれらは無次元であるが，状態数の対数が意味のある量でその値を特徴づける単位を考えても面白いかもしれない．実際，角度の単位であるラジアンも無次元量の単位であるが役に立つものである．また，似たような例としては dB（デシベル）や地震の大きさを表すマグニチュードなどがある．

そう考えると，有名なエネルギーと熱の関係を与えた熱等量の関係（ジュールの関係）

$$1\,\mathrm{cal} = 4.2\,\mathrm{J} \tag{33}$$

も深遠な関係になってくる．熱平衡の範囲ではほぼ自明の関係と捉えられ，今では，熱もエネルギーの単位 [J] で計り，[cal] が使われなくなっているが，それらは違う量であることを認識しておく必要があるだろう．

熱のおもしろい性質として，**ヒートポンプ**がある．部屋を暖房するために，100 kcal の熱を増やすために W [W=VA] の電気ストーブを用いると電力量として

$$W \times \mathrm{time}[\mathrm{Ws} = \mathrm{J}]/4.2 = 100{,}000\,[\mathrm{cal}] \tag{34}$$

を消費しなくてはならない．第一種永久機関を禁止しているエネルギー保存の法則から，このエネルギーはどうしても必要なように思えるが，それ

*5) 例えば，よく知られた，定積比熱と定圧比熱に関するマイヤーの関係は，

$$\begin{aligned} C_V &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \\ &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \\ &= C_P + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \end{aligned} \tag{29}$$

にマクスウェルの関係

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{V,N}$$

を用い，理想気体の状態方程式を代入すると

$$C_V = C_P - R \tag{30}$$

として得られる．

*6) 等重率の原理と熱平衡状態の存在から導かれる．

は上の熱とエネルギーの違いを忘れた考えである．部屋の外には熱エネルギーはいくらでもありそれを持ち込めばよい．熱力学第2法則によると部屋の外の方が部屋より寒い場合，熱は自然には入ってこない．しかし，熱の移動をあきらめる必要はなく，移動に必要な仕事を供給すればよいのである．

そのため，例えばある種のサイクルを利用する．理想的な場合としてカルノーサイクルなど可逆過程を用いると部屋の外から取り込まれる熱量 ΔQ_{L} とサイクルに必要な仕事 ΔW の間には，部屋の内外の温度をそれぞれ $T_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{L}}$ とすると

$$\frac{\Delta Q_{\mathrm{L}}}{\Delta Q_{\mathrm{H}}} = \frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{L}}}, \quad \Delta Q_{\mathrm{H}} - \Delta Q_{\mathrm{L}} = \Delta W \tag{35}$$

の関係がある．部屋の中に持ち込まれる熱量 ΔQ_{H} は，$\Delta Q_{\mathrm{L}} + \Delta W$ であるので，

$$\Delta Q_{\mathrm{H}} = \frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}} \Delta W \tag{36}$$

であり，$T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}} \ll T_{\mathrm{H}}$ の場合には必要な仕事に比べて非常に多くの熱が持ち込める．実際，外が 0°C ($T_{\mathrm{L}} = 273\,\mathrm{K}$)，室内 20°C ($T_{\mathrm{H}} = 293\,\mathrm{K}$) の場合には，仕事の約15倍のエネルギーが得られるのである．最初にエネルギー保存で考えた必要な仕事の評価は，ヒートポンプで外界の温度が絶対0度の場合のものである．

また，熱エネルギーは認識できないエネルギーとしたが，認識できないとは恣意的な基準である．実際，**認識できる能力が変わるとエントロピーは変化**する．同じ気体でも，0°C 1気圧の気体1リットルの空気という認識をした場合は，空気が熱力学の対象であり，そのときのエントロピーは全空気数を N とし，それらが区別できないとして

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} = \ln\left(\frac{V^N}{N!}\right) \simeq N \ln(V/N) \tag{37}$$

である．空気が酸素 x リットルと窒素 $1-x$ リットルの混合物であることを認識し，それぞれが同じ圧力，つまり同じ密度で別々に存在する状態でのエントロピーは

$$\begin{aligned}\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} &= xN\ln(V/N) + (1-x)N\ln(V/N) \\ &= N\ln(V/N)\end{aligned} \tag{38}$$

であり，空気の場合と同じである．しかし，それらを混合するとエントロピーは

$$\begin{aligned} N\ln(V/N) \;\to\; & Nx\ln(V/xN) \\ & + N(1-x)\ln V/(1-x)N \\ =\; & N\ln(V/N) \\ & - N(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)) \end{aligned} \tag{39}$$

となり，エントロピーの増大 $-k_{\mathrm{B}}N(x\ln x + (1-x)\ln(1-x))$ をもたらす．この場合，状態を元に戻すには，片方の分子しか通さない壁を用いて分離しなくてはならない．その場合に必要な仕事はちょうど $-k_{\mathrm{B}}N(x\ln x + (1-x)\ln(1-x))$ である．このことは，空気が酸素と窒素の混合気体であることを‘知っているかどうかで’，その系のエントロピーは異なることを示している．この混合によるエントロピー増加は混合エントロピーと呼ばれ，不純物による沸点の上昇や，浸透圧などの本質的原因となる．

この問題は**ギブスのパラドックス**と呼ばれる問題を引き起こす．ある瞬間に系の右半分にいる粒子と左半分にいる粒子を区別すると，その後の両者の混合によってエントロピーは増大するので，系のエントロピーは永久に増大し続けるというものである．そのパラドックスの答えは，「区別できない」ということである．

しかし，もし何らかの方法で区別できると，エントロピーはさらに増大でき，それを用いて仕事を取り出すことができる．そのような思考実験にシラード (Szilard)[3] エンジンと呼ばれるものがあり，ミクロの世界で情報の認識が仕事につながることが議論されている．そのようにミクロな情報を利用できると，熱エネルギーをエネルギーとして使えるとの考え方はマクスウェルの悪魔と呼ばれ，熱力学の第2法則を破るものとして議論されてきた．もし，高速の分子だけを選択的に取り入れるとヒートポンプの場合とちがって“仕事なし”で熱が取り入れられることになる．最近，小さな系での情報を有効に利用すると，仕事が取り

出せるとの実験が行われ注目を集めている[4,5]．しかしそのような場合も，観測系まで含めて考えると決して熱力学の第２法則を破るものでないことも示されている[5]．

これらの研究からもわかるように，今後‘情報’という量の物理学がますます重要になるであろう．また，現在世界的にも重要な問題になってきているエコロジーも本質的にはエントロピーの問題であり無駄なエネルギーは発生しないという関連からも状態量としてのエントロピーの動力学，つまり非平衡統計力学の研究が重要になってくるであろう．熱力学の第２法則によると，自発的な熱の流れ，あるいは仕事の熱化は許されている．しかし，それがどのように起こるかについては熱力学の第二法則はなにも与えておらず，それを何とか定式化しようとするのが非平衡統計力学である．熱力学現象を詳しく見すぎると“熱”がとれてただの力学になってしまうことから，何か普遍的なことがいえるかどうか難しいところである．しかし最近，ゆらぎの定理や Jarzynski 等式[6]など平衡状態に操作を加えた場合の一般的な関係についても研究が進められており，今後の非平衡現象の理解の質的発展が期待される．

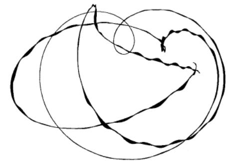
参考文献

1) 宮下精二,『熱力学の基礎』(サイエンス社)；田崎晴明『熱力学—現代的な視点から』(培風館)；佐々真一『熱力学入門』(共立出版)；清水明『熱力学の基礎』(東京大学出版会).
2) 宮下精二『有限温度の物理学』(丸善).
3) L. Szilard, *Zeitschrift Physik* **53** (1929) 840.
4) T. Sagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 250602, and **104** (2010) 198904; 沙川貴大, 博士論文, 東京大学 (2011) およびその中の文献.
5) S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Munetuki, and M. Sano, *Nature Physics*, **6** (2010) 988.
6) D.J. Evans, E.G.D. Cohen and G.P. Morriss, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 2401; C. Jarzynski, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2690.

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

量子力学と演算子

量子力学に必要な知識はすべてディラックの教科書で学んだ



初田 哲男

1. 量子力学の成立

量子力学は，作用量子仮説と光の粒子性（プランク 1900 年，アインシュタイン 1905 年），原子スペクトルの前期量子論（ボーア 1913 年，ゾンマーフェルト 1916 年），物質波の理論と電子の波動性（ド・ブロイ 1924 年）などの萌芽的アイデアに端を発し，行列力学（ハイゼンベルグ），波動力学（シュレーディンガー），変換理論（ディラック），波動関数の確率解釈（ボルン），ヒルベルト空間上での数学的定式化（フォン・ノイマン）などを経て 1925 年から数年の間に瞬く間に完成しました[1)].

その後，量子力学は，相対論的量子力学や場の量子論への拡張，原子・分子物理，量子化学，原子核物理，天体物理，固体物理・凝縮系物理，素粒子物理などへの広範な応用で成功を収め，現代物理学の根幹を成す理論体系となっています．さらに，トンネルダイオード，超伝導量子干渉素子(SQUID)，量子細線・量子ドット，量子計算，トンネル走査型顕微鏡（STM)，電子線ホログラフィー，核磁気共鳴イメージング（MRI）など様々な応用があります．

量子力学の成立は決して一本道というわけではありませんでしたが，異なるように見える理論形式を包含する枠組みがディラックにより与えられたことで，透徹した理解が進みました．その内容は，1930 年に出版されたディラックの名著『量子力学の原理（The Principles of Quantum Mechanics)』に美しい形でまとめられています．この教科書は第 4 版まで改訂され，原著や朝永振一郎らによる優れた邦訳[2)]は，現在でも物理学を学ぶ人々のバイブルとなっています．“人生に必要な知恵はすべて幼稚園の砂場で学んだ”[3)]ならぬ，“量子力学に必要な知識はすべてディラックの教科書で学んだ” と副題を付けた所以です．

ディラックの教科書は，以下のような流れで書かれています：

- **(i)** 原子のようなミクロな系ではニュートン以来の古典力学が破綻する理由を精査し，
- **(ii)** 次に破綻を回避する新しい理論の数学的形式を用意し，
- **(iii)** さらにその数学的形式の奥にひそむ物理的意味を可能な限り調べ，
- **(iv)** 最後にその理論を極限にまで駆使して物理現象の説明や新しい現象の予言を行う．

これは，ディラック自身の独特の研究スタイルともよく合致しています．

量子力学の構築に際してのディラックの考え方を，第 I 章 4 節から引用してみましょう：

『物理学のような科学のおもな目的は像を描き出すことではなくて，現象を支配している法則を定式化し，それらの法則を応用して新しい現象を発見することにあるという点を注意しておこう．もし

も像が描ければそれにこしたことはないけれども，像が描けるか描けないかは二の次の問題に過ぎない．原子に関する現象の場合には普通の‘像’ということばの意味での像を描けることは期待できない．普通このことばは，本来古典論的な働きを営む模型をさしているからである．しかし‘像’ということばの意味をひろげて，基本法則が内部に矛盾を含まないことを明らかにするような見方はどんなものでもこれに含まれるという解釈をすることもできる．このように意味をひろげておけば，量子論の法則に慣れてくるにつれてだんだんと原子に関する現象の像が描けるようになってくる．』

この解説では，ディラックの教科書からの引用を『　』で盛り込みつつ，ディラックの論法に従いながら量子力学の数学的体系とその物理‘像’について説明を試みます．

■　2. 重ね合わせの原理と状態ベクトル　■

原子の世界では，観測を行うことで対象がかき乱されます．つまり，

『われわれの観測能力の細かさには限りがあり，それに伴ってかき乱される程度の小ささにも限りがある．この限界はものの本性に根ざすものであって，観測する人の方で技術を改良したり熟練を積んだりしても，決してその限界を越えることはできない．』

したがって，ミクロの世界を記述する理論でできることは，観測結果が特定の値をとる確率の計算に限定されるのです．

さらに一歩進んで，量子力学の体系を構築するために，ミクロの世界の最も基本的な自然法則とも言える「**状態の重ね合わせの原理**」を導入しましょう．あるミクロな対象には一つの‘状態’が関連付けられており，どんな‘状態’も，それを2つまたはそれ以上の他の状態の重ね合わせと考えることができるとするのです．例えば，斜めに偏光した光子の状態は，2つの直交する偏光状態の重ね合わせと考えられます．これと，すでに述べた観測のかき乱しによる不確定性を考慮すれば，

『どんな原子系でもそれが与えられた状態にあるとき観測を行うと，一般にその結果は一定ではない．すなわち，同じ条件のもとに実験を何度か繰り返すといくつかの異なった結果がえられることがありうる．もっとも，自然の法則として，実験を非常に多くの回数繰り返すと，その結果特定の値はそれぞれ全体の回数の内の一定の割合だけ得られるものであり，従ってそれぞれ一定の確率で特定の結果が得られるのである．この確率こそこれから理論を用いて計算しようとするものである．』

上で述べたことを端的に証明する実験として，外村彰氏らによる電子の量子干渉パターンの観測があります[4)]（図1参照）．単一光源から出た電子が2重スリット（スリット1とスリット2）を通過

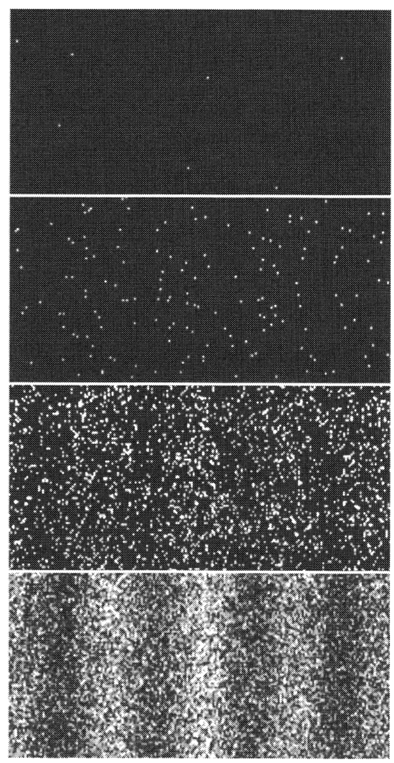


図1　電子線バイプリズムを使った電子波の干渉パターン[4)]．(a), (b), (c), (d) の順に検出器上で検出される電子の数が増加するにつれ，干渉パターンが明瞭になってくる[4)]．

し，スリットの背後にある検出スクリーンで観測される状況を考えます．実際には2重スリットと同様の働きをする電子線バイプリズムが使われます．電子の状態は，スリット1を通る状態と，スリット2を通る状態の重ね合わせとなっています．各観測毎の電子のスクリーン上での位置を予測することはできませんが，多数回の測定により検出スクリーンで観測される電子の確率分布が一定の干渉パターンを示していることがわかります．

状態の重ね合わせを数学的に表現するのに有効な手段は，物理的状態をベクトルに同定することです．ディラックは，無限次元のベクトル空間 $\mathcal{V}$ の元として**ケットベクトル**またはケット（$|\psi\rangle$ と表記）を，$\mathcal{V}$ の双対空間 $\mathcal{V}^*$ に属するベクトルを**ブラベクトル**またはブラ（$\langle\psi|$ と表記）と呼びました．ケットとブラは，それぞれ線形性・反線形性を持ちます：すなわち，複素数 c_1, c_2 を係数にもつケットやブラの和は，やはりケットやブラとなります：

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle, \tag{1}$$

$$\langle\psi| = c_1^*\langle\phi_1| + c_2^*\langle\phi_2|. \tag{2}$$

さらに，これらには内積 $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$（**ブラケット**）が定義されます（初めてディラックの教科書を読んだときに，格調高い文章の中に突然現れるこの気の利いた命名に大いに感動しました）．特に，$\phi = \psi$ の場合，内積は実数となり，さらにその値が正の場合，$\| \psi \| \equiv \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ はノルムと呼ばれます．一つの物理状態は，ケットベクトルの方向に対応させられるので，それぞれのベクトルをノルムで割って規格化しておけば便利です．

■ 3. 力学変数と線形演算子 ■

古典力学における座標や運動量などの力学変数に対応するのは，量子力学では $\mathcal{V}$ 上の状態ベクトルに作用する**線形演算子**です．これを $\hat{A}$ と書くと，ケットへの作用は，その線形性より

$$\hat{A}|\psi\rangle = c_1\hat{A}|\phi_1\rangle + c_2\hat{A}|\phi_2\rangle \tag{3}$$

となります．さらに $\hat{A}$ のブラへの作用は，$(\langle\phi|\hat{A})|\psi\rangle = \langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle)$ で定義されます．また，$\hat{A}$ の共役演算子 $\hat{A}^\dagger$ を以下のように導入します：

$$\langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle^*. \tag{4}$$

力学変数が演算子になったことで，一般に力学変数の掛け算はその順番によって異なる結果を与えます．これが，古典論と大きく異なる特徴といえます．特に，$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ のとき，$\hat{A}$ はエルミート演算子と呼ばれ，$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ で定義される固有値 a は実数となります．固有値は離散的な値をとる場合も，連続的な値をとる場合もある．

さてここで，実際の測定と，固有値や固有ベクトルの関係を以下のように仮定しましょう：エルミート演算子に対応する力学変数の固有状態について測定を行えば確実にその固有値を観測値として得る．つまり，

『固有値はどれでも，その体系の何かある状態について力学変数の測定をするときに，結果として得られる可能性のあるものである．』

さらに，$\mathcal{V}$ 上のケットベクトルが $\hat{A}$ の固有ベクトル $|a\rangle$ で展開できるとき，$\hat{A}$ は**オブザーバブル**（観測可能量）と呼ばれます．また，任意の規格化された状態 $|\psi\rangle$ に対してオブザーバブルを多数回測定したときの平均値は $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ で与えられるとしましょう．

物理的に測定可能な力学変数は，オブザーバブルに限られます．実際，任意の状態に対してある力学変数の測定を行ったとき，その固有値の一つが必ず観測されると共に，もとの状態ベクトルは対応する固有ベクトルに変化するということが保証されるのはオブザーバブルに限られるからです．

複数のオブザーバブルが互いに交換するものであれば，これらの同時固有状態が完全系をなし，その逆も成り立ちます．この場合には，これらは同時測定が可能となります．逆に，互いに交換しないオブザーバブルの組（$\hat{A}$ と $\hat{B}$）について，それらの平均値（$\langle\hat{A}\rangle, \langle\hat{B}\rangle$）と標準偏差（$\Delta A \equiv \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$,

$\Delta B \equiv \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2}$）の間に

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \tag{5}$$

なる関係が成立することがシュワルツの不等式を用いると示せます．交換子 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ は，典型的にはプランク定数（$\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$ J · sec, [作用]=[エネルギー]×[時間] の次元を持つ微視的世界の普遍定数）程度の大きさを持ちます．従って，(5) 式は，どんな状態ベクトルに対しても，$\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定結果が $\hbar/2$ の精度を越えて同時確定できないことを示します．$\hat{A}$ を粒子の位置演算子，$\hat{B}$ を粒子の運動量演算子としたものは，通常，**ハイゼンベルグの不確定性関係**と呼ばれています．

■ 4. δ 関数 ■

少し横道にそれますが，ディラックが導入した δ 関数について触れておきましょう．あるオブザーバブル $\hat{A}$ が連続固有値 a を持つ場合を考えると，任意のゼロでないノルムをもつケットベクトルは

$$|\psi\rangle = \int da\ c(a)|a\rangle \tag{6}$$

と展開され，この状態のノルムは，

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int da'\ c^*(a') \left[\int da\ c(a) \langle a'|a\rangle \right] \tag{7}$$

と書けます．

$\langle a'|a\rangle$ は，$a = a'$ でのみ値を持ちますが，その大きさは [ ] 内の積分が有限となる程度の無限大でないと，左辺がゼロになってしまいます．ディラックは，そのような性質をもつ**広い意味での関数**（δ 関数）を導入します：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1, \quad \delta(x \neq 0) = 0, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) = f(0). \tag{9}$$

ディラックは，この関数について，

『広い意味での関数はそれ自身としてははっきり定義された値を持たないけれども，積分される関数の中に因子として現れるときにその積分ははっきりした値を持つことがわかる.』

と説明しています．

1962 年–1963 年に行われたインタビュー[5)]で，δ 関数の着想について聞かれた際に，ディラックはブリストル大学の電気工学科での勉強を振り返り，

『構造物に対して，あるときは分散し，あるときは一点に集中して荷重がかかることがありますね．これらは本質的には同じなのですが，それぞれに異なった方程式を使うことがあります．本質的には，これら 2 つのことを統一するということから，δ 関数の考えが出てきたように思います．… その時に統一まで考えたということは決してないですが，取り扱いが違っても本質的に両者は同じであるということは当時感じました.』

と述べています．

■ 5. 確率解釈 ■

ディラックは，状態 $|\psi\rangle$ に対して，オブザーバブル $\hat{A}$ が a という値をとる確率を現す指標として以下の平均値を導入しました（ここでは簡単のため離散固有値を考えます）：

$$P_a = \langle\psi|\delta_{\hat{A}a}|\psi\rangle = |\langle a|\psi\rangle|^2. \tag{10}$$

2 つ目の等式は，$\hat{A}$ の固有ベクトルが完全系をなすことを使えば得られます．これは，$\hat{A}$ に関する測定を行ったときに固有値 a が得られる確率は，いま考えている状態に対応する規格化されたケットベクトル $|\psi\rangle$ の中にどの程度固有ベクトル $|a\rangle$ が含まれているかという振幅（**確率振幅**）の絶対値の平方であることを意味します．従って，確率振幅は，量子力学の様々な計算における最も基本的な量と言うことができます．特に，オブザーバブルとして座標演算子 $\hat{\boldsymbol{q}}$ を選ぶと，ある粒子が位置 $\boldsymbol{q}$ に見出される確率振幅は $\psi(\boldsymbol{q}) = \langle \boldsymbol{q}|\psi\rangle$ となり，座標表示での**波動関数**と呼ばれます．

この波動関数の確率解釈に従えば，多数回の測

定の後，図 1 のような検出スクリーンで観測される電子の確率分布は，

$$P_{\boldsymbol{q}} = |\psi(\boldsymbol{q})|^2 \tag{11}$$
$$= |\psi_1(\boldsymbol{q})|^2 + |\psi_2(\boldsymbol{q})|^2 + 2\mathrm{Re}(\psi_1(\boldsymbol{q})\psi_2^*(\boldsymbol{q}))$$

で与えられます．ψ_1, ψ_2 はそれぞれスリット 1, 2 を電子が通過する場合の確率振幅です．最後の項が量子力学に特有の干渉効果を表しており，同様の量子干渉パターンは，低速中性子，水素分子，ヘリウム分子，さらにはフラーレン C_{60} や C_{70} に至るまで，様々な粒子を用いて確かめられています．

6. 量子条件

ここまでの重要な 3 つの物理的概念は，状態の重ね合わせ原理，力学変数の非可換性，そして確率振幅，の 3 つです．しかし,『古典力学に代わる力学の完全な形式』を構築するには，交換しないオブザーバブルの組 $\hat{A}, \hat{B}$ について，$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ の値を与える手続き，つまり**量子条件**あるいは交換関係，が必要になります．

量子条件を見出す一つの方法は，古典論における**ポアッソン括弧**との類推を追求することです．ただ，古典論から量子論が導けるわけではないのであくまで類推を指針に論理の飛躍をすることになります．ディラックの教科書では，“量子論におけるポアッソン括弧” が古典論におけるポアッソン括弧と同様の性質を満たすことを要請することで，前者が線形演算子の交換関係に比例することを示し，その比例係数をプランク定数 $\hbar$ と同定することで，座標 $\hat{q}$ と運動量 $\hat{p}$ に関する以下の基本的な量子条件に到達しています：

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{12}$$

7. 運動の法則

前節までで，ある一つの時刻における量子力学の一般的枠組みを議論しましたが，力学の理論を完成させるためには，異なった時刻の間を結びつ

ける関係も考える必要があります．

『力学系について観測を行うと，その体系の状態は変化するが，それがどう変わるのかは予言できない．しかし，観測と観測の中間では，量子力学の場合も古典力学と同様に因果律が適用されるのであって，体系は運動方程式に従い，この方程式によってある時刻の状態から後の時刻の状態が決まるのである．』

ここで，系の時間発展が線形演算子 $\hat{U}(t)$ によってもたらされ，

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(t=0)\rangle, \tag{13}$$

しかも状態ベクトルのノルムが時間とともに保存されることを仮定しましょう．そうすれば，$\hat{U}$ が $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ を満たす**ユニタリー演算子**であることがわかり，そこから状態ベクトルに対するシュレーディンガー方程式が得られます：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \tag{14}$$

ここで，$\hat{H} = \frac{1}{i\hbar}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\hat{U}-1}{t}\right]$．このように定義された $\hat{H}$ が全系のエネルギーを表すことは，振動数 ω を持つ定常状態では，右辺が $\hbar\omega$ となることと，アインシュタインの関係式 $E = \hbar\omega$ からわかります．

(14) 式のように，状態ベクトル自身が時間発展する記述法は**シュレーディンガー描像**と呼ばれます．一方，それとユニタリー変換で結び付いている**ハイゼンベルグ描像**では，状態ベクトルは $|\psi_{\rm H}\rangle = |\psi(t=0)\rangle$ と初期時刻に固定され，力学変数である線形演算子が $\hat{A}_{\rm H}(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)$ と時間発展します．この微分形がハイゼンベルグの運動方程式です：

$$\frac{d\hat{A}_{\rm H}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_{\rm H}(t), \hat{H}] + \frac{\partial\hat{A}_{\rm H}(t)}{\partial t}. \tag{15}$$

この式において，交換子 $[\hat{A}_{\rm H}, \hat{H}]/i\hbar$ を古典力学のポアッソン括弧 $\{A, H\}_{\rm P.B.}$ に形式的に読み替えれば，古典力学変数 A についてのハミルトンの運動方程式が得られるので，力学変数に関して古典論から量子論へ自然な拡張がなされていることがわかります．

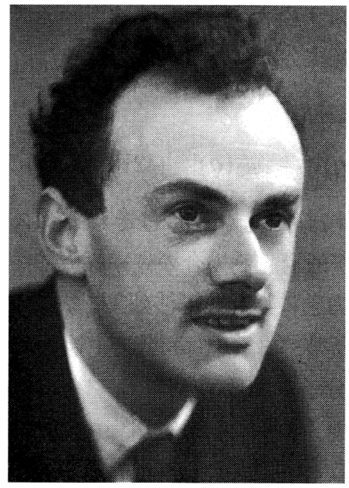


図 2　1933 年ノーベル賞受賞当時のディラック[6)]．

粒子の散乱現象や崩壊現象を扱う場合には，状態ベクトルと線形演算子が共に時間変化する相互作用描像を採用すると便利です．ハミルトニアンが $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ と分解され，$\hat{H}_0$ が時間にあらわに依存しない場合を考えてみましょう．このとき，状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ の $\hat{H}_0$ による時間発展をあらかじめ抽出し，$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}|\psi_{\rm I}(t)\rangle \equiv \hat{U}_0(t)|\psi_{\rm I}(t)\rangle$ なる状態ベクトル $|\psi_{\rm I}(t)\rangle$ を導入します．すると線形演算子は $\hat{A}_{\rm I}(t) \equiv \hat{U}_0^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}_0(t)$ と変換され，$|\psi_{\rm I}(t)\rangle$ は**朝永–シュウィンガー方程式**を満たします：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_{\rm I}(t)\rangle = \hat{V}_{\rm I}(t)|\psi_{\rm I}(t)\rangle. \tag{16}$$

これは，場の量子論における摂動計算でも基礎となる方程式です．

■ 8. おわりに ■

最後に，ディラックの教科書のまえがきから引用しましょう．

『自然界の基本的な法則は，われわれが直感的に心に描けるような世界を直接に支配しているのではけっしてない．その基本的な法則の支配を受けるのはもっと基礎的なものであって，そのものを

心に描こうとすればどうしても見当違いのものになってしまう．… だれでもこの世に生まれてくると習わなければならない基本的な概念（例えば‘近い’とか‘同じ’とかの概念）があるが，それと同じように，物理学の新しい概念も長い間にそれらの性質や使い方に慣れた上で初めて習得できるものである．』

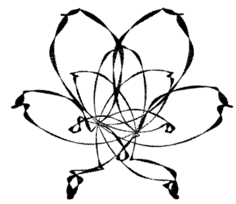
物理状態に対応するケットベクトル，力学変数に対応する線形演算子，連続固有値を扱う必要から生まれた δ 関数などの数式表現は，ミクロの世界の新しい物理概念を人間が習得する上での重要なガイドになってきました．しかしながら，その誕生から 85 年以上過ぎた現在でも，我々は量子力学の概念がもたらす様々な量子現象に驚かされ続けていることも事実なのです．量子力学の概念が，子供にも自明になるような日はいつ来るのでしょうか？

参考文献

1) 高林武彦，『量子論の発展史』，中央公論社，1977.
2) ポール・ディラック，『量子力学（第 4 版）』，（朝永振一郎他訳），岩波書店，1968.
3) ロバート・フルガム，『人生に必要な知恵はすべて幼稚園の砂場で学んだ』，（池央耿訳），河出書房，1996.
4) 外村彰，『目で見る美しい量子力学』，サイエンス社，2010.
5) http://www.aip.org/history/ohilist/4575_1.html
6) http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/dirac.html

（はつだ・てつお，東京大学大学院理学系研究科）

波と量子



長谷川　修司

1. はじめに

東京スカイツリータワーから放射される地上デジタル放送の電波の周波数 ν は 500 MHz 程度だそうで，その値と，光速度 c と波長 λ との関係式

$$c = \nu \cdot \lambda \qquad (1)$$

を使ってこの電磁波の波長 λ を計算すると 60 cm 程度になる．80 MHz の FM ラジオ放送の電波の波長は 4 m 程度になるし，AM 放送の電波にいたっては 300 m にもなる．このマクロなスケールの波長のおかげで，ビルの裏側でも，ある程度電波が「回折」して回り込むので（多少の電波障害はあるが）ラジオやテレビを見聞きできる．有名な「**ヤングの二重スリットの干渉実験**」（1805 年）以来，電磁波が波であることは疑いの余地のない事実であり，マクスウェルがそれを理論的に体系化した（1864 年）．ファインマンは有名な彼の教科書の中で，マクスウェル方程式の集大成は 19 世紀最大の出来事であり，それに比べれば米国の南北戦争など取るに足らない出来事だと述べている（ご冗談でしょう？）[1]．

しかし，20 世紀に入ってまもなく，光は電子のような粒子的性質を持つ，という「**光量子仮説**」をアインシュタインが言い出した（1905 年）．つまり，周波数 ν の電磁波は

$$E = h\nu, \quad p = \frac{E}{c} \qquad (2)$$

で書けるエネルギー E と運動量 p を持つ光（量）子であるという（h はプランク定数）．当時，マクスウェルの古典電磁気学では理解できなかった「光電効果」の現象を説明するために提案された仮説であった．ときにはメートルのオーダーになる波長を持つ電磁波のエネルギーと運動量が，空間的に局在した粒子のような「塊」になっているという．そんな粒子描像は，今までに知られていた回折や干渉現象など電磁波の「空間的に拡がった」性質と相容れるはずもない．なので到底受け入れられない，というのが当時の学界の反応だったようだ．実際，この光量子仮説を精密な実験で確かめたミリカンも，その論文の序文で，「the bold, not to say reckless, hypothesis （無謀と言わないまでも大胆な仮説）」と皮肉っている[2]．しかし，多数の実験を行った結果，ミリカンは論文の結論のセクションで，「アインシュタインの光電効果の式はすべての場合で観測結果を正しく記述するように見える（Einstein's photoelectric equation *appears* in every case to predict exactly the observed results）」と書いている．自分自身の実験結果を見ても，彼はまだ半信半疑だったようだ（ミリカンの 1923 年のノーベル物理学賞受賞業績には，有名な油滴の実験による電気素量の決定だけでなく，この光電効果の実証実験も含まれている）．

ミリカンに限らず，物理学を勉強した人なら誰でも，電磁波は波でもあるし粒でもあるという**波動粒子二重性**（wave-particle duality）を実感で

きることはないであろう．それゆえに，物理学って何だか良くわからない，という印象を与えることになる．あるいは，自然の奥底には，人間には思い描くことのできない何かが存在する，という畏敬の念を与えることにもなろう．メートルオーダーの波長の波が空間的に局在したエネルギーの塊だなんて，どんな「絵」を想像すればいいのか途方にくれるのは当り前で，長年，物理学で生計を立てている私でさえ今もってそう思うのだから，初学者が面食らうのは何の不思議もない．イギリスの高校物理の教科書『アドバンシング物理』には，こう書いてある．「光子は決して小さく局在するひと塊のものではありえない．エネルギーとしてひと塊であっても，空間的にひと塊であるということにはならない．光子は単純な粒子とはいえないし，また単純な波ともいえない．」…ますます，分からなくなってくる．

ド・ブロイは，この光量子仮説からインスピレーションを得てこう考えた（1923年）[3]．波だと考えられていた電磁波が粒子的性質をもつというなら，粒子だと考えられていた電子が波動性を持ってもいいのではないか，そうすれば，電子線を結晶にあてたときに見られる奇妙な反射率の角度依存性（ブラッグ反射のこと）も回折現象として説明できるはずだ，と（ド・ブロイの理論の前にすでにダヴィッソンらの電子回折の実験結果が報告されていて，それを説明するためにド・ブロイは波動説を考え出したのである．多くの教科書には，ド・ブロイの予言が先にあって，その後に電子回折で実験的に実証されたと書かれてあるが，史実は逆[4]）．

(1) 式と (2) 式を結びつけると，

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h} \tag{3}$$

が簡単に導かれる．第1式がいわゆる**ド・ブロイの公式**であり，電子の波動的性質である波長と粒子的性質である運動量を結び付けた関係式として有名である．しかし，彼がイメージしていた波は現代の波動描像とは少し違っていたようだ．電子が速さ v で走っていると，エネルギー $E = mc^2$，運動量 $p = mv$，質量 $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$（m_0 は電子の静止質量，$\beta = v/c$）なので，この電子の波の（位相）速度 v_ϕ を計算すると，(3) 式より

$$v_\phi = \nu \cdot \lambda = \frac{E}{p} = \frac{c}{\beta} \tag{4}$$

と書ける．電子の速さ v は光速 c を超えられないので常に $\beta < 1$ であり，その結果 $v_\phi > c$ となる．電子の波は光速より速く進むという．これは相対性理論に反するので，ド・ブロイの論文[3]では，この波を「位相波」と呼び，エネルギーや情報は運べない「非物質波（non-material wave）」と言っている．つまり，電子はあくまでも粒子であり，それに「位相波」という波が付随していると考えた．きん斗雲に乗った孫悟空のイメージだ．きん斗雲こと位相波が光速より速く走り，電子より一足先に結晶にぶつかって干渉や回折を起こして電子が進むべき方向を決める．その後，孫悟空ならぬ電子が，そのきん斗雲に導かれようにして進んでいくという．ド・ブロイの位相波の正体は不明だが，波動性と粒子性について極めて明快なイメージだったといえる．逆に，現代の物理学で主流の「**物質波**（material wave）」の描像では，電磁波・光子の場合のように具体的なイメージを描けず，あるときは波動として振る舞い，またあるときは粒子として振る舞う，としか言ってくれない（ボーアの相補性原理）．煙幕を張られてしまって歯がゆい思いだけが残ることになる．30年ほど前，私が大学3年生のときに受けたM教授の量子力学の講義でも，電子の波動性と粒子性に関してこれ以上踏み込んではいけない，とまで言われた．このボーアの相補性原理，あるいはコペンハーゲン解釈といわれる，言ってみればご都合主義のような描像を，アインシュタインは生涯受け入れず，「精神安定哲学，一種の宗教のようなもので，大変精巧に作り上げられているので，当面の間，信者たちに柔らかな枕を提供するだろう」とまで皮肉ったという[1]．M教授が，「わかるか，わからないかではなく，信じるか信じないかだけの問題だ」と授業中に言い放ったのを今でもはっきり覚えている．

しかし，このようなナイーブな疑問や不満，モヤモヤしてしっくりと腑に落ちないという気持ち

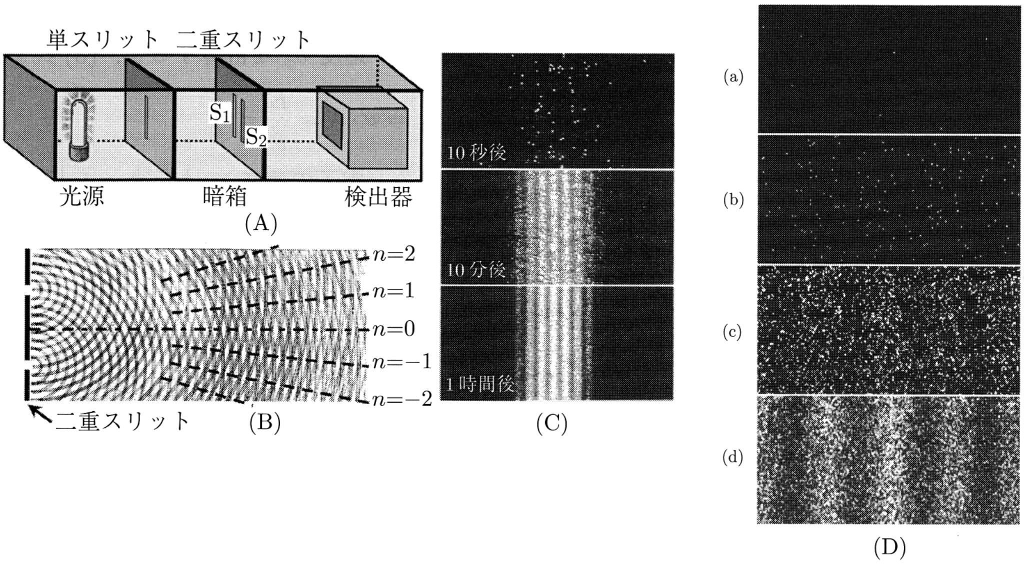


図 1　(A) 非常に弱い光によるヤングの二重スリットの干渉実験.(B) 二重スリットから出てくる波の干渉によって明線と暗線ができる模式図.(C) 単一光子検出器による干渉縞の形成過程を観測した結果（文献 5) より転載).(D) 電子波によるヤングの二重スリット実験での干渉縞の形成過程（文献 8) より転載).画面に到達した電子の総数はおよそ (a) 7, (b) 200, (c) 6000, (d) 40000.この干渉縞の形成過程のムービーが日立基礎研究所のホームページで閲覧できる（http://www.hqrd.hitachi.co.jp/rd/doubleslit.cfm).

は，科学を研究する上で重要なことで，実際，それがモチベーションになって研究が進む場合が多い．例えば，アインシュタインが，光と同じ速さで走ったら景色はどう見えるのだろうか，と考えたことのように．この小文では，量子の波動粒子二重性をどうイメージしたらいいのか，読者の理解に少しでも助けになればと思って書いてみた．しかし，もちろん，この不可思議な二重性など誰にも実感できないことは明らかで，ただ，それに慣れるしかないのであるが．

2. 光子の干渉

現代では実験技術が進歩し，スクリーン上に到達する 1 個 1 個の光子や電子を検出してその位置を表示することができる．そのような実験装置を使って，光および電子による「ヤングの二重スリットの実験」が行われている．図 1(A) に示すように，暗箱の中で，非常に弱い光を用いたヤングの二重スリットの実験を行った．高校の教科書には，この実験の模式図として図 1(B) に示すような図が描かれている．2 つのスリットから出てきた球面波が干渉して明線と暗線，つまり干渉縞を作るという説明である．今回の実験では，光が非常に弱いため，光子が 1 個ずつ二重スリットに照射される．検出器は，1 個 1 個の光子がどこに到着したのか検出できる「位置敏感型検出器」である．図 1(C) がその検出器の出力結果であり，1 個 1 個の輝点が検出された 1 個 1 個の光子を表している[5]．この画像から，光は 1 個，2 個，3 個，… と数えられる「粒子」として検出されていることがわかる．到着する光子の数が少ないときには，規則性なくランダムな位置に光子が到着しているように見えるが，光子の数が増加してくると次第に縞模様が見えてくる．これが，二重スリットによる干渉縞である．波としての性質は，多数の光子の分布として表れていることがわかる．光は，このように電磁波という波動性と同時に光子という

粒子性も併せ持つ，という二重性を如実に示す実験である．

マクスウェル方程式から，例えば電磁波の振動電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ に関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{5}$$

が導かれる[5]．その解は，平面波なら（複素数表記で）

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \exp\left[2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right] \tag{6}$$

と書ける．実際，これを (5) 式に代入すると，(2) 式を使って解であることが示せる．図 1 (C) の長時間露光で見られた明暗の干渉縞は，2 つのスリットから発した，このような電場が重なった合成電場の絶対値の二乗，つまり波としての振幅強度の分布である．しかし，短時間露光のときに見られた光子 1 個 1 個は，この方程式では記述できない．それには電磁場の第二量子化，あるいは**場の量子論**という理論的枠組みが必要となる．それによると，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\left[\widehat{a}\cdot\exp\left\{2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right\} + \widehat{a}^{+}\cdot\exp\left\{-2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right\}\right] \tag{7}$$

なる形に書ける．やや複雑になっているが，$\widehat{a}$ と $\widehat{a}^{+}$ は光子の**生成消滅演算子**と呼ばれるもので，光の粒子性を表す．実際，両者の積 $\widehat{a}^{+}\cdot\widehat{a} = n$（の固有値）は整数値 $(0,1,2,\cdots)$ をとり，それが光子の数を表す．指数関数の部分は古典的な (6) 式と同じ形であり，光の波動性を表す．このように一つの表式の中に粒子性と波動性があらわな形で表現されている．しかも 1 個の光子だけでなく，多数個の粒子を同時に扱える．ちなみに，光の波動としてのエネルギーは，(6) 式より，波の振幅の絶対値の二乗 $|\boldsymbol{E}_0|^2$（と振動数の二乗 ν^2）に比例するが[6]，それを，粒子描像を考慮して正確に表現すれば，光子のエネルギーは (2) 式で与えられる $h\nu$ であり，電磁波の振幅が光子の個数 (n) なので，単位時間に照射される光のエネルギーは，$n\cdot h\nu$ である．これが波動としてのエネルギーに対応する．しかし，光電効果のように，個々の光子と電子の衝突は，1 個 1 個の光子のエネルギーだけが問題となるので，波動としてのエネルギーは関係ない．このような考え方によって，光電効果を定量的に測定したレナードの実験結果を理解できる[4]．

3. 電子の干渉

ド・ブロイの説を聞いたデバイは，「あまりに子どもじみている」，何かが波だというなら，適切な波動方程式がなければならない，波とは普通，何かが波打っているもの，それは何なのか，と断じたという．その言葉を真剣に受け止めたシュレーディンガーは，未知なる ψ（プサイ）関数についての波動方程式，ご存知**シュレーディンガー方程式**を作り出した．自由電子の場合，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{8}$$

なる方程式を満たし（$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数，m は電子の質量），その解は，

$$\psi = \psi_0\cdot\exp\left[2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right] \tag{9}$$

と，平面波の形になる．これは電磁波 (6) 式と同じ形になっている．つまり，ψ 関数が振動して波動として伝播することが電子の運動を記述することになるという．この解から，電子の運動量を ψ の波長に，電子のエネルギーを ψ の振動数に対応させることができる（実際，(9) 式を (8) 式に代入すると，$h\nu = p^2/2m$（運動エネルギー）となる）．まさにド・ブロイの (3) 式が自動的に出てくる．

しかし，ψ が何か，その解釈をめぐって当時の物理学者たちはもちろん，現在まで様々な議論が続いている．従来知られていたニュートンの運動方程式やマクスウェルの方程式，あるいは水や音の波動方程式では，観測可能な物理量，つまり物体の位置や運動量，電場，磁場，変位などが変数であったが，シュレーディンガー方程式の変数 ψ は何なのか．それは直接観測できるものではないために，様々な拒否反応が出たし，現在でもある．

シュレーディンガーは $|\psi|^2$ を電荷密度のようなもの，つまり粒子に付随する霧のようなものではないかと思っていたようである．しかし，まもなくボルンは，$|\psi|^2$ は電子のある状態が見出される確率を与えると解釈し，今ではそれが主流となっている．つまり，「電子の運動は，確率の法則に従うが，確率そのものは因果律に従って波として伝播する」という．パウリはさらに進めて $|\psi|^2$ は1個の電子が特定の場所に見出される確率を表しているとした．このような「波動関数の解釈」によって，「無理やり」波動描像と粒子描像がある程度折り合いをつけたといえる．

光の代わりに電子を使ったヤングの二重スリットの実験もある．電子線ホログラフィ顕微鏡という装置を使うが，その詳細は文献4,7,8) にゆずる．その観察結果が図 1(D) に示されている[8)]．ここでも1個1個の電子を検出できる位置敏感型検出器を用いている．この図は，到着した電子を検出して干渉縞ができていく過程を撮影したビデオからとったスナップショット写真である．画面上の輝点1個が検出器に到達した電子1個である．(a)〜(c) に示すように，検出器に到着する電子の数が少ないときには電子はバラバラな位置に到着しているように見えるが，(d) に示すように，電子の数が増えるに従って徐々に干渉縞の濃淡が現れてくる．これは，図 1(C) で見た光の干渉縞と全く同じだ．(d) で見える濃淡はシュレーディンガーの波動関数 ψ の絶対値の二乗の分布と一致している．検出器に到達する直前まで，電子は波として振る舞ってスクリーン全体に拡がっている．その時間発展は（因果的であり，）シュレーディンガー方程式で記述される．それを解いて計算される $|\psi|^2$ は，ある場所に電子が見出される確率を与える．しかし，検出器に到達して検出された瞬間に，スクリーン全体に拡がっていた1個1個の電子の波動関数がある一点だけで $|\psi|^2=1$ となり，他のすべての場所では $|\psi|^2=0$ と変化する，つまり，拡がっていた波が一点に「収縮」して粒子となるのである（「**波動関数の収縮**」と呼ばれる）．この波動関数の変化はシュレーディンガー方程式では記述できないもので，光の速度より早く瞬時に，そして非因果的に起こるのである．しかし，どこの場所が選ばれるか，その確率は検出される直前の $|\psi|^2$ で決まるという．だから，1個1個の電子の波動関数を知っているにも関わらず，我々は1個1個の電子が検出器の画面のどこに到着するか予言することはできない．言えるのは確率だけである．シュレーディンガーは，このボルン・パウリ流の解釈を生涯受け入れることはなかったが，現在の（日本で主流の）量子力学は，図 1(D) の現象をこのように説明しているのである（シュレーディンガーは，この解釈がばかげていることを示すために，いわゆる「シュレーディンガーの猫」の思考実験を考え出した）．この辺の問題が，いわゆる「**観測問題**」と言われているテーマである．この問題は，量子力学が論理的に一貫性を持つのか，あるいは，量子力学がどこまで実在の世界を反映しているのか，という疑問にまで発展し，量子力学の解釈を巡る中心的課題として現在に至るまで議論の絶えないテーマとなっている．しかし，ここでは深入りするのはやめておくので，文献9) などを参照してほしい．

我々が予言できるのは，多数個の電子を検出した場合に見えてくる，それらの到着位置の確率分布だけである．電子の「波」と言っているのは，1個1個の電子の波動関数であり，確率の波であるが，1個の電子だけでは何の役にも立たず，同じ波動関数をもつ多数個の電子を扱って初めて意味を持つのである．波動関数 ψ は1個の電子の波動関数であるが，多数個の電子の統計的な振舞いを記述するのに役立つのである．このような意味を承知していれば，電子波の干渉は，（太陽光のような非コヒーレントな）光の波の干渉と同じ形式で記述できる．しかし，波動の意味は両者で異なる．光は電場・磁場という場の振動であるが，電子の波動性は上述のような確率の波であり，実体のない波と言わざるを得ない．

図 1(D) に示した電子による二重スリットの実験は，外村彰氏らのグループが実現した非常に有名な実験である[7,8)]．この実験が実現する10年以

上も前に，ファインマンは彼の教科書[10]の中で，この実験について次のように言っている；「この現象は，どんな古典的方法をもってしても決して説明することはできません．そして，その中に量子力学の真髄があるのです．まさにミステリーとしかいいようがありません．—しかし，この実験を，実際にやってみようと思ってはいけません．不可能に近いほどスケールを小さくしなければならないので，現実に実験を行うことはできません．頭の中で考えるだけの"思考実験"なのです」．このように，ファインマンが不可能と言っていた実験を見事に実現してしまったのである．

アメリカの科学雑誌 *Physics World* が2002年に「最も美しい物理実験」を挙げるよう読者アンケートを行ったところ，300以上の歴史的な実験の中から，この電子波の干渉縞形成の実験が第1位に選ばれた[11]．ちなみに2位以下のベスト10は，(2) ガリレオの落下実験，(3) ミリカンの油滴の実験，(4) ニュートンのプリズムによる太陽光の分光実験，(5) ヤングの光による二重スリットの実験，(6) キャベンディッシュのねじれ振り子による地球重量の測定実験，(7) エラトステネスによる地球の周長の測定，(8) ガリレオの斜面上での転がり実験，(9) ラザフォードの原子核を発見した散乱実験，(10) フーコーの振り子の実験である．いずれも物理学の根幹をなす重要な法則を実証あるいは発見した実験であるが，その中で図1(D)が第1位に選ばれたのは，電子の波動粒子二重性や波束の収縮といった量子の世界の不思議さを見事に表しているからだと思う．

4. おわりに

東京大学数物連携宇宙研究機構の機構長をしている村山斉氏の著書[12]が20万部を超える大ベストセラーになっているというので，早速買って読んでみた．その中に，ガリレオの有名な言葉が引用されている：「自然という書物は数学の言葉で書かれている」．実際，万有引力の法則を解明したニュートンの著書は『自然哲学のための数学的諸原理』であり，彼自身が作った微分積分という数学で自然の摂理が描かれている．アインシュタインの相対性理論も然り．だから，村山氏が機構長を務めている組織の名前「数物連携」，つまり数学と物理の連携はガリレオやニュートンの昔から始まっているという．この小文で議論した波動粒子二重性も数学の言葉でしか表現することができないようで，日常言語では満足のいく表現には到底ならない．波動粒子二重性，あるいは相補性原理を記述するために，現代では，町田茂と並木美喜雄らが中心となり，多ヒルベルト空間という抽象数学の概念を使って，波でも粒子でもないことを表現する枠組みができ上がっているという．またもや数学で自然が描かれていることを認めざるを得ない．しかし，ボーアがもし，この状況を見たら，そんな抽象数学の記述だけでは満足しないだろう．彼は，量子的世界を通常の言語と古典的概念の枠組みの中で完全に表現するよう努力しなければならないと強く主張した人だった[1]．頭の中で「絵」を描くことができる「可視化可能性」を放棄しようとしなかった．数学を用いて自然を記述するのが物理学ではなく，物理学とは，私たちが自然について何が言えるかという学問であり，日常言語で自然の摂理を表現できることが物理学の最終ゴールなのだと彼はいう．数学に弱い実験屋としては救われる言葉だ．ここで紹介した光子や電子の干渉実験の「美しい」画像を見れば，その意味するところは日常言語では表現できないけれど，数学以上に自然の摂理を見事に語っていると感じるのはひいき目だろうか？

参考文献

1) ロバート．P. クリース（著），吉田三知世（訳），『世界でもっとも美しい10の物理方程式』，(日経BP, 2010)．
2) R.A. Millikan, A direct photoelectric determination of Planck's "*h*", *Physical Review* **7**, 355 (1916).
3) L. de Broglie, Waves and quanta, *Nature* **112**, 540 (1923).
4) 長谷川修司，『見えないものをみる—ナノワールドと量子力学—』，(東京大学出版会，2008)．
5) 土屋裕，大塚英治，杉山優，黒野剛弘，堀口千代春，

「フォトンカウンティング領域における「ヤングの干渉実験」」，テレビジョン学会誌 **36** (11), 1010 (1982).
6) 長谷川修司，『振動・波動』，(講談社基礎物理学シリーズ 2, 2009).
7) A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa, Demonatsration of single-electron build up of an interference pattern, *American Journal of Physics* **57**, 117 (1989); 外村彰，『量子力学を見る—電子線ホログラフィーの挑戦—』，岩波科学ライブラリー 28,（岩波書店，1995）;『ゲージ場を見る—電子波が拓くミクロの世界—』，（講談社 BB，1997）.
8) 外村彰，『目で見る美しい量子力学』（サイエンス社，2010）.
9) 別冊数理科学（2006 年 4 月号），『量子の新世紀—量子論のパラダイムとミステリーの交錯—』（サイエンス社，2006）.
10) R. ファインマン（著），砂川重信（訳），『ファインマン物理学 5，量子力学』（岩波書店，1979）.
11) ロバート．P. クリース（著），青木薫（訳），『世界でもっとも美しい 10 の科学実験』，（日経 BP，2006）.
12) 村山斉，『宇宙は何でできているのか—素粒子物理学で解く宇宙の謎—』，（幻冬舎新書，2010）.

（はせがわ・しゅうじ，東京大学大学院理学系研究科）

Summer School「数理物理 2011」
可積分系の新展開

日時：2011 年 8 月 25 日（木）14 : 10
～28 日（日）12 : 50

会場：東京大学大学院数理科学研究科大講義室
（駒場キャンパス）

講師と講演題目：

井上玲（千葉大理）
箱玉系の可積分性—クリスタルとトロピカル幾何

白石潤一（東大数理）
Ding-Iohara 代数，Macdonald 関数と AGT 予想

立川裕二（東大 IPMU）
4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の不思議な関係

中西知樹（名大多元数理）
共形場理論と団代数

定員： 申込み順で先着 200 名です．（これは会場の都合によるものですが，今まで定員を超えたことはありません．）

参加費： 2,000 円を当日に会場受付で集めます．予稿集（当日配布）などの実費にあてます．また，前年までの予稿集の残部について，当日販売する予定です．

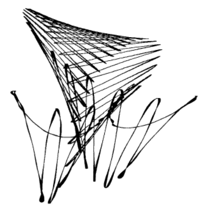
参加申込み： 8 月 10 日までに，氏名，所属，身分，e-mail address または連絡先の住所を明記して，e-mail またはハガキで下記あてに申し込んでください．E-mail は題名を Summer School としていただけると整理の都合上助かります．E-mail の申し込みについては確認のお返事をします．ただし河東の海外出張中は返事が遅れることがあります．その他は，定員を越えた申込みにのみ連絡します．電話での問い合わせにはお答えしかねます．

連絡先：〒 153–8914 目黒区駒場 3–8–1
東京大学大学院数理科学研究科　河東泰之
E-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

なお，最新の情報については，
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp
/~yasuyuki/mp2011.htm
をごらんください．

世話人：
緒方芳子 Yoshiko Ogata（東大数理）
小嶋　泉 Izumi Ojima（京大数理研）
河東泰之 Yasuyuki Kawahigashi（東大数理）

一般相対論と幾何学



小玉　英雄

一般相対論は，物理学の様々な分野の中で，法則記述の幾何学的色彩が最も強い理論である．この特色のため，一般相対論の与える世界観や物理現象についての予言は，他の分野のものと大きく異なる．また，一般相対論の研究は，幾何学を中心として数学へも大きな影響を与えている．本稿では，一般相対論がこのような幾何学的定式化を獲得した背景を説明し，さらにそのもたらした成果のいくつかを紹介する．

1. 物理法則の幾何学化

1.1 重力と接続

重力が幾何学と密接に結びついた最大の原因は，**等価原理**にある．これは慣性質量と重力質量の一致という実験事実を原理にまで高めたもので，その一般化の度合いにより様々な表現があるが，大まかには，「重力がゼロとなる局所的な基準系（**局所慣性系**）がどの時空点でも存在する」ことを要請する．局所慣性系で重力以外の場や物質が特殊相対論に従うとすると，場や物質への重力の作用を決定するには，異なる時空点近傍での局所慣性系の間の関係を指定すればよい．各時空点 P での局所慣性系は，互いに Lorentz 変換で結びつく 4 個のベクトルの組 $e_a (a = 0, 1, 2, 3)$（正規直交基底）の集合により決定されるので，この関係は隣接する 2 点でこれらの基底の集合の対応規則，言い換えれば**平行移動**を指定すれば決まる（図 1）：

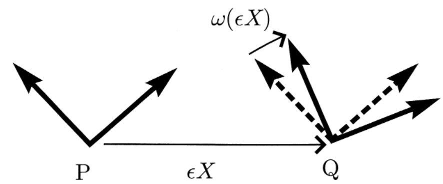


図 1　局所慣性系の接続.

$$\delta^{/\!/}_{\epsilon X} e_a = -\epsilon e_b \omega^b{}_a(X). \tag{1}$$

ここで X は任意のベクトル，ϵ は微小量で，この式の左辺は点 P における基底ベクトル $e_a|_{\rm P}$ を ϵX だけ離れた点 Q まで平行移動して得られるベクトルと点 Q における基底ベクトル $e_a|_{\rm Q}$ との差である．ただし，相対論の習慣に従って，同じ項内で 2 度現れる添え字については和を取ることを暗黙に仮定している（**Einstein の和の規約**）．また，$\omega^b{}_a(X)$ は 3×3 行列で，X に線形に依存するので，$\omega^b{}_a$ は 3 次の行列に値を取る 1 次微分形式（1 形式）となる．この 1 形式は**接続形式**と呼ばれる．

接続が与えられると，ベクトル場 $V = V^a e_a$ に対してベクトル場 X 方向の**共変微分**

$$\nabla_X V = e_a(X^b \partial_b V^a + \omega^a{}_b(X) V^b) \tag{2}$$

が定義される．特に，ベクトル場 V がベクトル場 X に沿って平行である条件は $\nabla_X V = 0$ となる．

ただし，接続形式は，基底の場，すなわち各点での基底 $\{e_a\}$ を指定して初めて決まるもので，各点 x で基底を $e'_a(x) = e_b(x) \Lambda^b{}_a(x)$ と Lorentz 変換により回転（**局所 Lorentz 変換**）すると，行

列表示 $\omega = (\omega^a{}_b)$, $\Lambda = (\Lambda^a{}_b)$ の下で

$$\omega' = \Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda \qquad (3)$$

と変化する．ここで，$d\Lambda$ は行列関数 $\Lambda(x)$ の微分である．このため，Minkowski 時空でも，各点での基底を勝手に取ると接続形式はゼロでなくなり見かけの重力場が生じるが，このような重力場は適当な局所 Lorentz 変換により消し去ることができる．このことから，どのような局所 Lorentz 変換を行っても接続形式をいたるところゼロとできなければ，**本質的な重力場**が存在すると言える．

1.2 ホロノミー群と曲率テンソル

この本質的な重力場，言い換えれば時空の曲がりを検出するもっと良い方法がある．それは，閉曲線 γ に沿って基底を平行移動してみることである．この平行移動によりある点 P から出発して再びもとの位置 P に戻ったとき，P の位置の基底 $e_a|_{\rm P}$ を移動して得られる基底 $\tilde{e}_a$ は一般にもとの基底とある 1 次変換で結ばれる：

$$\tilde{e}_a = e_b|_{\rm P}(h_\gamma)^b{}_a. \qquad (4)$$

変換行列 h_γ は γ に沿う**ホロノミー**と呼ばれる．基点 P を通過する様々な閉曲線を考えると，対応するホロノミーは閉曲線の結合に関して群をなす：$h_\alpha h_\beta = h_{\alpha\circ\beta}$．この群は**ホロノミー群**と呼ばれる．

基底の局所 Lorentz 変換 $e'_a = e_b\Lambda^b{}_a$ に対し，$h'_\gamma = \Lambda^{-1}h_\gamma\Lambda$ と変換するので，本質的重力場がない場合には基底の取り方に依らず $h_\gamma = 1$ となる．逆に，ホロノミー群が自明となるなら，適当な局所 Lorentz 変換により大域的に $\omega = 0$ とできることが示される．したがって，ホロノミー群は本質的重力場を基底の取り方に依存しない方法で記述する手段となる．

しかし，ホロノミー群を決定することは現実的には容易でない．そこで用いられるのが無限小の閉曲線に沿うホロノミーである．いま，基底ベクトル e_c と e_d で張られる 2 次元面内の小さな閉曲線に対するホロノミーを計算すると，その値の単位行列からのずれは閉曲線で囲まれる領域の面積 S_γ に比例し

$$(h_\gamma)^a{}_b = \delta^a_b + \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}S_\gamma \qquad (5)$$

で与えられる．ここで $R^a{}_{bcd}$ は接続形式と e_a の双対基底 $\theta^a(a = 0, 1, 2, 3)$，すなわち $\theta^a(e_b) = \delta^a_b$ を満たす 1 形式の組を用いて

$$\mathscr{R}^a{}_b := \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (6)$$

と表され，局所 Lorentz 変換に対して 4 階のテンソルとして振る舞う量である．これより，$R^a{}_{bcd}$ がゼロでない点が存在すればホロノミー群は非自明となる．逆に，いたるところ $R^a{}_{bcd}$ がゼロなら，可縮な閉曲線に対するホロノミー群は自明となることが示される．すなわち，局所的には平坦となる．そこで，4 階テンソル場 $R^a{}_{bdc}$ は，接続 ω の**曲率テンソル**と呼ばれる．

1.3 等価原理と Riemann 接続

接続が重力場を完全に記述するので，接続形式に対して課す条件により異なる重力理論が得られる．例えば，一般相対論では，次の 2 条件を要請する：

i) （**計量条件**） 平行移動はベクトルの長さを保つ．

ii) （**ねじれのない条件**） 各点 P において $\omega|_{\rm P} = 0$ となる局所基底場 e_a が，P を原点とする局所座標系 x^μ に対応する座標基底 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ を用いて，$e_a = (\delta^\mu_a + O(x^2))\partial_\mu$ と表される．

第 1 の条件は，$\omega^b{}_a(X)$ が無限小 Lorentz 変換となること，すなわち，Minkowski 計量を η_{ab} として，$\omega_{ab} = \eta_{ac}\omega^c{}_b$ が $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$ を満たすことと同等である．このとき，(3) より，各点 P において，$\omega|_{\rm P} = 0$ となる局所基底場 e_a を局所 Lorentz 変換により求めることができるので，広い意味での等価原理が保証される．条件 ii) はこの基底が，2 次の精度で適当な座標系（局所慣性系）の座標軸に接していることを意味する．この条件が成り立つと，e_a の双対基底が $\theta^a = (\delta^a_\mu + O(x^2))dx^\mu$ と表されるので，$d\theta^a|_{\rm P} = \omega^a{}_b|_{\rm P} = 0$ となる．これより，

$$\Theta^a := d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b = 0 \qquad (7)$$

が得られる．この 2 形式 Θ^a は捩れ形式と呼ばれ，(3) より，局所 Lorentz 変換に対してベクトルとして振る舞うので，条件 (7) は任意の正規直交基

底に対して成り立つ．

ここで非常に大切なことは，上記の 2 つの条件を要請すると，接続形式 ω の各正規直交基底 $\{e_a\}$ での表式が e_a のみにより一意的に決まってしまうことである．各点での $\{e_a\}$ の全体は，その点での計量 $g(V,W)=\eta_{ab}V^aW^b$ と 1 対 1 に対応するので，これは，上の 2 条件を満たす接続が計量により一意的に決まることを意味する．この接続は **Riemann 接続**と呼ばれる．

1.4 様々な重力理論

このように，等価原理を要請すると，重力場は時空計量（あるいはそれから決まる Riemann 接続）により記述されるとするのが自然となる．これを明確な要請（**計量仮説**）としたのが一般相対論である．もちろん，この要請を満たす接続ないし計量の従う方程式，すなわち重力場の方程式を与えて初めて理論は完全となる．Einstein は，i) 重力が弱く Newton 理論が成り立つ領域ではこの方程式が Poisson 方程式 $\triangle\phi=4\pi G\rho$ に帰着する，ii) 特殊相対論ではエネルギー密度 ρ を含む共変的な量が 2 階のエネルギー運動量テンソル T_{ab} となるので，重力場の方程式は $G_{ab}=8\pi GT_{ab}$ という形をもつ，iii)G_{ab} は計量の高々 2 階微分しか含まず，かつ 2 階微分について線形である，という 3 つの条件を満たすことを要請し，その結果次の方程式を得た．

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}+\Lambda g_{ab}=8\pi GT_{ab}. \tag{8}$$

ここで，$R_{ab}=R^c{}_{acb}$ は **Ricci 曲率**，$R=R^a_a$ は**スカラ曲率**，Λ は宇宙定数である．

もちろん，弱い意味の等価原理を満たすだけなら，計量条件のみを要請すればよく，この場合，接続は捩れを持つことになる（$\Theta^a\neq 0$）．このような捩れを許す重力理論は **Einstein–Cartan 理論**と呼ばれる[1]．また，計量条件を緩めて，平行移動により角度は保たれるが長さは変化してもよいとすることも可能である．この場合，接続形式は反対称行列と単位行列に比例する成分の和となる：$\omega_{ab}=\omega_{[ab]}+\eta_{ab}A$．この新たな成分は 1 形式 $A=A_\mu dx^\mu$ により決定されるが，基底の変換に各点でのスケールの変換 $e'_a=e^\phi e_a$ を含めると，A は電磁場の 4 元ポテンシャルと同じ変換則 $A'=A+d\phi$ に従う．この接続は，重力と電磁場の幾何学的統一理論を作る試みの中で 1918 年に H. Weyl により導入されたものである．

このように，接続という概念を基礎として重力理論を一般化してゆくと，Riemann 接続と同時に捩れやゲージ場が現れ，より広い相互作用を記述する理論が得られる．これは超弦理論・M 理論にも共通する[2]．

2. 宇宙論と幾何学

2.1 閉じた宇宙と開いた宇宙

一般相対論の幾何学的定式化が重要な役割を果たした分野の一つが宇宙論である．1920 年代後半に Humanson と Hubble は，我々の銀河系に近い銀河が我々からの距離に比例する速度で遠ざかっていることを発見した（1929）．現在 **Hubble の法則**と呼ばれているこの法則は，この銀河集団が一様等方に膨張していることを意味する．

当時，この結果を一挙に宇宙全体に外延して，Hubble の法則は，宇宙全体の一様等方な膨張を表すと解釈された．この宇宙の一様等方な膨張を記述する枠組みとして，提案されて間もない一般相対論が採用されたが，その帰結は従来の Newton 理論と大きく異なるものであった．

Newton 理論では空間は常に Euclid 空間であることが前提なので，宇宙の一様性は，銀河集団としてのガス雲の一様性として表される．このガス雲の膨張を記述するために，このガス雲の半径 R の球に着目する．この球に含まれる銀河の運動に併せて球の半径 R を変化させると，$R(t)$ は圧力の無視できるガス雲に対するエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2-\frac{GM}{R}=E \tag{9}$$

を満足する（$\dot{R}=dR/dt$）．ここで，E は単位質量あたりのエネルギーを表す．現在の時刻での R の値を $r=R(t_0)$ として，ガス雲の膨張率を $a(t)=R(t)/r$ により定義すると，ガス雲の質量

密度を $\mu(t)$ として，この方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\mu - \frac{K}{a^2} \tag{10}$$

と書き換えられる．ここで，K は時間にもガス雲の取り方にも依らない定数で，E を用いて

$$K = -2E/r^2 \tag{11}$$

と表される．

一方，重力を時空の幾何学的構造として捉える一般相対論では，宇宙が空間的に一様等方であるという要請は，時空の計量（および物質の配位・運動）を不変に保つ変換（**等長変換**）全体が作る群（**等長変換群**）が次の性質をもつ部分群 G を持つこととして表現される：

i) （**空間的一様性**） G の軌道が空間的3次元超曲面となる．

ii) （**空間的等方性**） G の等方群は3次元回転群を含む．

特に，各軌道は一様等方な空間となる．このような3次元空間は，（局所的に）ユークリッド空間 E^3，3次元球面 S^3，3次元双曲空間*1) H^3 のいずれかと同型で，その計量 $d\sigma^2$ と空間サイズの変化を表す時間のみの関数（スケール因子）$a(t)$ を用いて時空計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2 \tag{12}$$

と表される（**Robertson–Walker 計量**）．また，物質のエネルギー運動量テンソルは，物質の圧力が無視できる場合に，時間のみに依存する固有エネルギー密度 $\rho(t) = \mu(t)c^2$ を用いて，

$$T^t_t = -\rho, \quad T_{\mu i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

と表される．これらを Einstein 方程式に代入すると，a の方程式として (10) と全く同じ方程式が得られる．ただし，一般相対論では K は3次元空間の（断面）曲率となる．すなわち，空間が E^3 なら $K = 0$, S^3 ならその半径を A として $K = 1/A^2$, H^3 なら $K = -1/A^2$ である．すなわち，Newton 理論でエネルギーという物理的な意味を持つ量が，一般相対論では空間曲率という幾何学量に対応することになる．

特に，Newton 理論で全エネルギーが負となる空間的に一様等方な宇宙は，一般相対論に従うと S^3 を空間として持つことを意味する．すなわち，我々の宇宙の空間が重力の作用で閉じている可能性が生じたのである．

2.2 Bianchi 宇宙

現在では，Hubble の時代と比べて比較にならないほど遠い距離までの宇宙構造や膨張則が観測され，宇宙は 100 Mpc を超えるスケールでは非常によい精度で一様等方であることが確認されているが，このような宇宙の一様等方性がなぜ実現したのかは長い間謎であった．宇宙背景放射が A.A. Penzias と R.W. Wilson により 1965 年に発見されて以降，1980 年代にインフレーション宇宙モデルが提案されるまで，時間空間の力学的性質によりこの宇宙の一様等方性を説明できないかという研究が盛んに行われた．特に，空間的な一様性は保つが非等方性は許す宇宙モデルの研究は，1967 年に C. Misner がニュートリノ摩擦による宇宙非等方性の減衰を研究して以降，具体的な研究が可能なモデルとして詳しく研究された．この一様等方宇宙モデルの一般化でも，幾何学的アプローチが重要な役割を果たした．

非等方性を許して一様性を課すには，上で述べた空間的一様群 G に対して条件 i) のみを要請すればよい．特に，空間的な等方性を全く持たない場合には，条件 i) は，一様性を表す群 G が3次元で，空間が G と同相であるという条件と同等となる．したがって，問題は3次元 Lie 群の分類に帰着される．この分類は，1870 年代初頭に Sophius Lie が Lie 群の概念を導入してから 20 年後の 1897 年に Bianchi により行われた．

この **Bianchi 分類**では，3次元 Lie 代数（あるいは対応する単連結 Lie 群）は，I, II, III(=VI$_{-1}$), IV, V, VI$_h$($h \le 0$), VII$_h$($h \ge 0$), VIII, IX の9種類に分類される（この証明については文献3) 参照）．ただし，VI 型と VII 型は連続なパラメータ h でさらに分類される．これらのうち，I 型は3次元

*1) 3次元双曲空間はその擬半径を A として，4次元 Minkowski 時空の超曲面 $-t^2+x^2+y^2+z^2 = -A^2 (t > 0)$ として実現される．

可換群 $\mathbb{R}^3$，VIII 型は $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$，IX 型は $SU(2)$ に対応する．他のものは多くの人にあまりなじみのない群である．また，これらの一様対称性をもつ空間のスカラ曲率は IX 型のみが正で，I 型はゼロ，VII_0 型はゼロないし負，他の型はすべて負となる．特に，単連結かつコンパクトな空間を許すのは IX 型のみとなる．これに対応して，一様等方な宇宙モデルのうち，閉じたモデル（$K>0$）は IX 型に含まれる．一方，平坦なモデル（$K=0$）は I 型および VII_0 型，開いたモデル（$K<0$）は V 型および VII_h 型（$h\neq-1$）と 2 つのタイプが対応する．したがって，これら以外の Bianchi 型 II, III, IV, VI_h, VIII の一様性をもつ宇宙モデルは，厳密な意味では決して等方化することはない．

3. 大域解析と物理

3.1 時空特異点

空間的に一様な宇宙モデルの振舞いは，その発見当初から人々を悩ましていた．それは，膨張宇宙を記述するこれらの解の大部分において，空間のサイズを記述するスケール因子が有限な時間の過去にゼロとなることである．したがって，ある“時刻”以前は時間空間自体が存在しなくなることになる．時間や空間は絶対的でその中に存在する物からの影響を全く受けない Newton 理論ではこれは起こり得ないことで，時間空間の構造自体が力学的対象となる一般相対論に特有の現象である．現在では，この現象は宇宙が有限な過去に誕生したことを意味すると解釈されるが，これに伴って時空の曲率が発散するため，この宇宙誕生時点は古典的な物理法則が破綻する「特異点」となる．このことに多くの人は当惑したのである．

同様の時空構造の破綻，すなわち**時空特異点**の発生は天体現象でも生じることが，圧力の無視できる物質のみが存在する場合の球対称一般解の発見（Tolman–Bondi 解，1934），安定な中性子星に対する質量上限の存在（J.R. Oppenheimer, H. Snyder 1939）などにより次第に明らかとなった．ある上限値を超える質量の星が重力収縮を始めるとそれを圧力で止めることができず，有限時間で密度が無限大に発散してしまうのである．一般相対論では，Einstein 方程式を通して密度の発散は曲率の発散を意味するので，これは時空特異点の発生を意味する．

3.2 特異点定理

ただし，これら宇宙論，重力崩壊いずれの場合も，特異点の発生が実際に示されたのは一様な系や球対称な系など高い対称性を持つ系のみであった．このため，対称性の低い一般的な状況では特異点は現実には回避できるのではないかと期待された．この期待を見事に打ち破ったのが，1965 年から 1970 年にかけて R. Penrose と S.W. Hawking により証明された一連の特異点定理である．これらの特異点定理は，想定している状況の違いにより定理ごとに表現が異なるが，大まかには次の 3 つの条件がそろうと時空の対称性に依らず時空に特異性が発生するというものである：

i) 因果律が成り立つ．
ii) 重力が引力となる．
iii) 重力が強い領域が存在する．

1 番目は時間的ないし光的な閉曲線がないという種類の条件である．2 番目は一見不思議に見えるかもしれないが，実は一般相対論では重力が引力であることが保証されていない．これを最も端的に表すのが **Raychaudhuri 方程式**である．この方程式は，重力のみの影響を受ける仮想的な粒子集団（ないし光子集団）の体積（光子の場合は波面の面積）が時間と共にどのように変わるか，数学的には時間的**測地線束**（光的測地線束）の振舞いを記述する方程式で，一つの測地線に着目し，その近傍の粒子集団のアフィンパラメータに関する体積変化率 $\theta=(dV/d\lambda)/V$（光子の場合は面積変化率），形の変形率 σ，回転角速度 ω を用いて

$$\frac{d\theta}{d\lambda}+\frac{1}{n}\theta^2=R_{ab}k^ak^b+2\sigma^2-2\omega^2 \quad (14)$$

と表される（図 2）．ここで，k は測地線の接ベクトル，R_{ab} は Ricci 曲率である．また，n は定数で，時間的測地線に対しては 3, 光的測地線に対しては 2 である．粒子集団のスケールを表すパラ

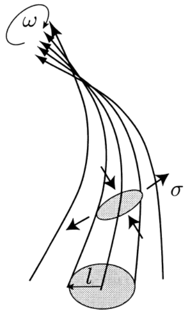


図 2　測地線束.

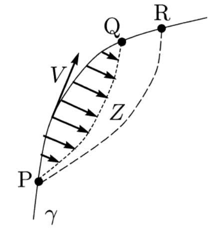


図 3　測地線に沿う共役点.

メータ $l(\lambda)$ を $\theta = n(dl/d\lambda)/l$ により定義すると，この式の左辺は $(n/l)d^2l/d\lambda^2$ と書けるので，このガスを構成する粒子の相対加速度を表す．したがって，右辺が力に比例することになるが，その中で重力の作用を表すのが第 1 項である．残りは運動学的効果で，特に第 3 項は遠心力に当たる．したがって，$R_{ab}k^ak^b \geq 0$ のときのみ重力が引力となることが分かる．この条件は**強エネルギー条件**と呼ばれることがある．

強エネルギー条件が成り立つと，一度収縮を始めた非回転的ガス雲は，$\omega = 0, \theta < 0$ より，重力以外の相互作用がなければ有限な時間で $\theta = -\infty$ となることが Raychaudhuri 方程式から容易に示される．$\theta = -\infty$ はガス雲の今注目している粒子の近傍が一点につぶれ，密度が発散することを意味するので，これは最も素朴な形の特異点定理となる．この場合，重力により収縮を始めるという仮定が 3 番目の強重力条件となる．膨張するガス雲を考え，以上の議論を過去向きに適用すると，宇宙初期の特異点の発生に関する定理が得られる．この場合，強重力条件は，単に宇宙が膨張しているという条件となる．

3.3 共役点

もちろん，非回転的とか，重力以外の力が働かないなどの条件をつけると現実的で強力な定理は得られない．そこで，Penrose や Hawking は少し遠回りな方法を用いた．その基礎となるのは，2 点を結ぶ測地線の長さに関する 2 次変分の研究である．よく知られているように，Riemann 幾何学では長さが停留値となる曲線が測地線となるが，それは必ずしも極大値や極小値とはならない．例えば，球面の北極と南極を結ぶ測地線（大円）は無限個あり，連続変形でつながっている．そこで，曲線の長さが極値となるかどうかを見るには，2 次の変分を計算する必要がある．結果は，曲線の変位を $\delta x^\mu(\lambda) = \epsilon Z^\mu(\lambda)$ として，

$$\delta^2 I = \epsilon^2 \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\lambda \left[g(Z, \nabla_V^2 Z) + R(Z, V, Z, V) \right] \tag{15}$$

となる．ただし，曲線の始点 P と終点 Q では $Z = 0$ とした．これより，2 階の微分方程式

$$\nabla_V^2 Z + R(Z, V)V = 0, \quad Z|_{\mathrm{P}} = Z|_{\mathrm{Q}} = 0 \tag{16}$$

（**Jacobi 方程式**）を満たす場（**Jacobi 場**）が存在すると，2 階変分までゼロとなる．このような測地線上の 2 点 P と Q は**互いに共役**であるという（図 3）．

測地線が時間的なら，P の共役点 Q を超えて延長した測地線上の点 R と始点 P を結ぶ別の測地線で，元の測地線より長いものが存在することが示される[4)]．同様に，光的測地線の場合には，共役点対を含む測地線の端点は時間的な曲線で結ばれることが示される．また，固定した 2 点を通る測地線の代わりに，1 点 P を通りある曲面 S に垂直に交わる測地線束について同様の変分を考えることができる．この場合，変位ベクトル Z は同じ Jacobi 方程式を満たすが，S との交点における境界条件が $\nabla_V Z = K(Z)$（K は S の外部曲率）に置き換わる．このような Jacobi 場が存在するとき P と S が共役となる．

上で議論した測地線束において，ある測地線を

基準とした近傍の測地線の相対位置を$\delta x^\mu = \epsilon Z^\mu$とおくと，実は$Z$はJacobi方程式を満たし，その解の1次独立な3個の組（光線の場合は2個の組）の張る立体の体積の測地線に沿う変化率が実はθに当たる．したがって，Raychaudhuri方程式はJacobi方程式から導かれ，点Pが曲面Sの共役点であるとは，Sに垂直に交わる測地線束に対するθがPで発散することと同等である．これと上での議論を組み合わせると，光的ベクトルに対して強エネルギー条件が成り立つとき，これらの測地線束がS上で$\theta < 0$となり，かつ測地線がいくらでも延長可能（測地的に完備）なら，必ずSに垂直な測地線γ上にSと共役な点Pが存在することになる．

3.4 Penroseの特異点定理

例えば，コンパクトでない初期面（Cauchy面）が存在する時空に，コンパクトで境界のない2次元捕捉面$\mathscr{T}$が存在するとする．ここで，2次元面$\mathscr{T}$が**捕捉面**であるとは，それに垂直な内向きおよび外向きの2つの光測地線束に対するθがいずれも負となる，すなわち$\mathscr{T}$から出た内向きと外向き光波面の面積がいずれも時間と共に減少することを意味する．星の重力崩壊によりブラックホールができる場合にはしばしばブラックホール内に捕捉面が存在する．$\mathscr{T}$から出る未来向きの時間的ないし光的な曲線が通過する点の全体を$J^+(\mathscr{T})$とすると，その境界$\dot{J}^+(\mathscr{T})$は$\mathscr{T}$上に端点をもつ光的測地線で生成される境界のない光的な3次元超曲面となる．ところが，光的強エネルギー条件が成り立つとき，これらの各光的測地線γがもし完備だとすると，仮定より必ず$\mathscr{T}$に共役な点が存在し，それを超えたγ上の点は$\mathscr{T}$からの時間的曲線で結ばれる．すなわち，γのうち$\dot{J}^+(\mathscr{T})$に含まれる部分は“有限な長さ”をもつ．$\mathscr{T}$はコンパクトなので，この長さには最大値があり，したがって$\dot{J}^+(\mathscr{T})$もコンパクトとなる．一方，（向き付け可能なら）時空を互いに交わらない時間的曲線で埋め尽くすことが常にできて，各曲線は空間的ないし光的な面と高々一度のみ交わる．そこで，この曲線族に沿う射影により，$\dot{J}^+(\mathscr{T})$を同相にCauchy面Σに埋め込むことができる．このとき，$\dot{J}^+(\mathscr{T})$の像はΣに含まれるコンパクトな境界のない3次元多様体となるが，非コンパクトな3次元多様体Σに含まれるコンパクト領域は必ず境界を持たねばならない．これは矛盾なので，すべての光的測地線が完備であることはあり得ない．すなわち何らかの特異性のため有限な長さで止まってしまう光線がある．これがPenroseの特異点定理の証明のあらすじである．

より強力な他の特異点定理の証明ではもっと巧妙な議論が必要となるが，本質は共役点の存在が矛盾に導くという大域幾何学的ロジックを使う点で類似している．実はこの測地線の2次変分に着目した方法は現代の大域微分幾何学でも非常に重要な役割を果たしている．このような手法がまず，一般相対論の研究で開発されその後，数学の世界に広がったのは興味深い．

4. 終わりに

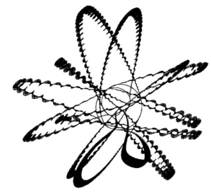
本稿では，一般相対論の幾何学定式化の背景とそのもたらした成果について見てきたが，ここで取り上げた例はその一部に過ぎない．古典論に限っても，大域解析分野でフィールズ賞に結びついた正エネルギー定理，ブラックホールの一意性に関連した様々な成果など，他にも多くの例がある．さらに，近年急速に発展している超弦理論・M理論は，高次元化により重力を含むすべての相互作用の統一理論を構築する可能性を示唆しており，これまでにもまして物理学と幾何学の結びつきが強まっている．物理法則の完全な幾何学化というEinsteinの夢が実現しつつあるように見える．

参考文献

1) Trautman, A.: *arXiv:0606062* (2006).
2) Polchinski, J.: *String Theory* (CUP, 1998).
3) 小玉英雄，佐藤文隆：『一般相対性理論』（岩波書店，2000）.
4) Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time* (CUP, 1973).

（こだま・ひでお，
高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所）

相対論的場の量子論



加 藤　光 裕

1. はじめに

物理学において理論が発展する際に，しばしば物理的内容あるいは概念が先に現れて，それを表現するための数学的形式が開発されていく場合と，逆にいくつかの原理的要請から数学的形式が発見されて，その意味する内容の理解が後からついていく場合の二通りがある．また，一つの理論でも，ある時期は形が先行したり，またある時期は内容が先行したりしながら，相互に影響し合いながら進んだりする．

その典型的な例として，相対論的場の量子論の発展の過程はとても興味深く，いろいろと参考になることが多い．

2. ディラック方程式

まずは，量子力学を相対論の要請に合うよう修正するために，どのような道筋を通って答えに辿り着いたのかをみてみよう．

非相対論的な量子力学では，質量 m の自由粒子（力を受けていない質点）に対するシュレディンガー方程式は，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi$$

と書ける．ここで $\psi(t,x,y,z)$ は，シュレディンガーの波動関数，$\hbar = h/2\pi$ は，プランク定数 h を 2π で割ったもの（ディラック定数とも呼ぶ）である．

この方程式は，時間変数 t の微分は1階なのに対し，空間座標 (x,y,z) の微分は2階であり，時間と空間は明らかに非対称である．相対論の要請は，方程式がローレンツ変換の下で形が変わらないことである．ローレンツ変換は空間座標と時間変数に対する線形変換（1次変換）であるので，この要請を満たすためには，微分の階数は同じでないと困る．

そもそもシュレディンガー方程式は，古典的なエネルギーと運動量の関係式 $E=(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2m$ において，

$$(E,p_x,p_y,p_z)\to i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t},-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

といった置き換えによって得られることを思い出せば，相対論においては一見，**アインシュタインの関係式** $E^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2+m^2$（真空中の光速度 c を 1 にする単位系をとっている）において同様の置き換えをすればよさそうに思える．そうすれば，時間微分と空間微分は2階で揃うからである．そうして得られる微分方程式は，**クライン–ゴルドン方程式**と呼ばれる．これは（後に場がみたす方程式として復活するが），シュレディンガー波動関数がみたす方程式としては，確率振幅としての解釈に問題があるため採用できない．かといって，両辺の平方根をとった $E=\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2+m^2}$ を使うのも問題点が多い．

そこで，ディラックは次のように考えた．まず，

方程式の元になるエネルギーと運動量の関係式を，形式的に $E = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m$ とおいてみる．ここで導入された係数 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ は，どういうものかわからないが，両辺の2乗を考えたとき，前出のアインシュタインの関係式に帰着すべきであろう．そうすると，

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = 1$$

（ここで，$i, j = x, y, z$ であり，δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $i = j$ のとき値1を，それ以外は値0をとる）という関係式をみたす必要がある．

すぐにわかるように，これは実数や複素数といった普通の数ではみたすことができない．ここであきらめないのがディラックの偉いところ．単なる数ではみたせないが，行列ならみたすものが見つかることに気づいた．$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ の4つの行列で上記をみたす最もサイズの小さいものは，4×4 行列で実現できる（なお上記関係式で1が出てくるところは単位行列とみなす）．

これを元にして，シュレディンガー方程式のときと同様な微分演算子への置き換えをして，方程式を作ると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-i\hbar\left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta m\right]\psi$$

となる．この方程式を**ディラック方程式**と呼ぶ．行列として 4×4 行列の表現をとれば，それが作用する相手の"波動関数" ψ は，4成分からなるベクトルでなければならない．この4成分の自由度は何を表しているのだろう．

実は，この4成分は，2種類の二重性に起因している．一つの二重性は，**スピン**と呼ばれる，粒子が持つ固有角運動量の自由度の反映である．ディラック方程式は，ローレンツ変換性と微分に関する一次性を課すことで得られた．つまり，ローレンツ変換あるいはその一部分である空間回転に関して性質のよい変換をしているはずである．数学的には，変換の群の表現に属していることを意味する．例えば，原子核の周りを回る電子の状態は，空間回転の群の表現，すなわち軌道角運動量で分類される．量子力学では，この軌道角運動量は，ある整数（$= 0, 1, 2, \ldots$）で特徴付けられる飛び飛びの値をもつ．しかし，回転群の表現には，整数で特徴付けられる表現の他に，半整数（$= 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$）で特徴付けられる一連の表現が存在する．この半整数の表現は，軌道角運動量では実現されないが，素粒子がもつスピンと呼ばれる固有角運動量では，実現されてよい．実際，電子は半整数 1/2 で特徴付けられるスピンをもつ．そして，スピン 1/2 の表現は，二つの独立した状態が許される．先に述べた二重性はまさにこの自由度なのである．非相対論的な量子力学では，この自由度を手で取り込むため，パウリのシグマ行列を用いた取扱いが必要であった．相対論的なディラック方程式では，定式化自体の中に既にスピンの自由度が取り込まれていたのだ．こうして，ディラック方程式は，電子のようなスピン 1/2 の素粒子を記述することがわかった．

では，残りの二重性は何に対応するのであろうか．これを理解するには，ディラック方程式の解の様子をもう少し見てみる必要がある．

3. ディラックの海と反粒子

ディラック方程式の解として，エネルギー運動量が (E, p_x, p_y, p_z) であるようなものを考えよう．つまり，

$$\psi(t, x, y, z) = u(E, p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

という形の解を考える．このとき，ディラック方程式は，

$$Eu = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)u$$

となり，エネルギー E は，右辺に現れた行列 $H = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z$ の固有値によって定まる．今，ある解 u が見つかったとして，その解に行列 $A = \alpha_x \alpha_y \alpha_z \beta$ をかけた Au を考えると，$AH = -HA$ に注意すれば，$Hu = Eu$ ならば

$HAu = -EAu$ となり，u と Au は同じ運動量に対し逆符号のエネルギーを持つことがわかる．つまり，正のエネルギーの解があれば，必ず負のエネルギーの解が同等に存在するのである．

このことは，問題を引き起こす．ディラック方程式をシュレディンガー方程式に代わるものと考えるならば，エネルギー固有値が下に有界でない，つまりいくらでも低いエネルギーの状態が存在してしまい，電子は安定に存在できなくなる．量子力学の登場によって，原子の安定性が保証されることになったはずが，相対論と組み合わせることで，再び不安定性の問題を抱えることになってしまうのでは困る．

そこで，ディラックは次のような救済策を考えた．電子のようなスピン 1/2 の粒子は，**パウリの禁止則**のため，同じ状態に2つ以上の粒子が入ることができない．そこで，我々が真空と呼ぶ空っぽの空間は，実は負のエネルギーの状態に電子が一つずつすべて入った状態であると考えようというのである．こうすると，我々が電子が一つ存在していると考える状態は，真空にもう一つ電子を加えた状態なので，その電子は正のエネルギー状態にしか入ることができず，安定に存在できる．奇妙な考え方であるが，これなら不安定性の問題から一応逃れられる．真空というのは，本当の空っぽではなく，そこら中，負のエネルギーの電子が詰まっているのである．これを**ディラックの海**と呼ぼう（図 1）.

ディラックの海を考えると，もう一つ面白い結果に導かれる．真空に詰まっている負のエネルギーの電子を一つ取り除いた状態を考えてみよう．この状態は，真空のエネルギーから負のエネルギーを差し引いたエネルギー，すなわち正のエネルギーを持つと解釈できる．つまりディラックの海の中に泡のようにぽっかりと電子一つ分が抜けた穴があって，それは正のエネルギーを運んでいる．そして，もし正のエネルギーの電子が，光子を放出してエネルギーを失ってその穴に落ち込んだとしたら，電子も「穴」も見えなくなり，再び真空状態に戻ることになる．つまり，電子の抜けた「穴」

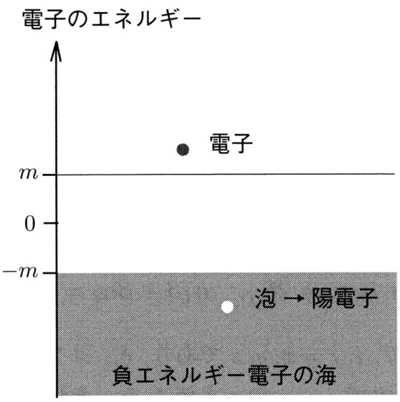


図 1　ディラックの海.

は，電子と対になって消滅できる粒子のようなものであり，しかも電子とは大きさが等しく符号が逆の電荷を持つ粒子ということになる．これは**反粒子**と呼ばれ，元の粒子と質量は同じだが，電荷など正反対の性質を持つ粒子の存在を予言する．

こんな奇妙な仮説は，にわかには信じ難かったが，ディラックの提唱から数年後に，アンダーソンが霧箱の中で電子と同じ質量と電荷の大きさの比をもつが，電荷の符号が正である粒子を発見し，陽電子と名付けた．こうして，ディラックの海の考え方は，何らかの意味で正しい方向を向いているらしいことがわかってきたのである．しかし，最終的な解決は，相対論的場の量子論の登場を待たねばならない．

4. 第 2 量子化

前述のディラックの海の考え方において注意すべき点は，本来 1 個の電子に対する方程式を扱っていたはずなのに（1 体問題），その真空を理解するために多体問題に移ってしまっていることである．非相対論的な量子力学においても，多体の問題を粒子数の変化も含めて取り扱うには，「第 2 量子化」という手続きが必要であり，そこでは 1 体のシュレディンガー方程式は，量子化するべき「場」のみたす方程式にいわば格下げされて，本来の意味の「状態」がみたすシュレディンガー方程式は，「場」を自由度とするハミルトニアンを用いて得ら

れるものとされたのであった．従って，粒子間の相互作用を考えると「場」の方程式は非線形になるが，「状態」のみたすシュレディンガー方程式は依然として線形性を保つのである．

例えば，粒子がポテンシャルからのみ力を受けて，粒子間の相互作用がない場合を考えてみる．シュレディンガー方程式をみたす関数 $\psi(t,x,y,z)$ は，力学的変数としての「場」と考えるので，量子化すると演算子となる．シュレディンガー方程式の解の完全系を $\{\phi_i(t,x,y,z)\}$ とし，演算子である場 ψ をこの完全系で $\psi=\sum_i c_i\phi_i$ と展開すると，その展開係数 c_i は $c_ic_j^\dagger - c_j^\dagger c_i = \delta_{ij}$ という関係をみたす演算子となる．c_i を消滅演算子，$c_i^\dagger$ を生成演算子と呼ぶ．粒子が一つもない状態，つまり真空状態を $|0\rangle$ と書くと，これは消滅演算子を掛けると消える（$c_i|0\rangle=0$）．i という準位に粒子が1個入った状態は，真空状態に生成演算子を一つ掛けて $c_i^\dagger|0\rangle$ で与えられ，i 準位に粒子が1個，j 準位に粒子が2個入った状態ならば $c_i^\dagger c_j^\dagger c_j^\dagger|0\rangle$ で与えられるという具合である．

このように，第2量子化された「場」を変数とする理論は，粒子数の違った状態をまとめて取り扱える枠組みなのである．

5. 相対論的場の量子論

このことは，相対論的な量子力学においても成り立つはずである．従って，ディラック方程式は，電子を記述する「場」の方程式であり，場を自由度とする量子力学つまり場の量子論を用いてはじめて，正しい多体の真空状態が議論できるのである．実際，ディラック場 $\psi(t,x,y,z)$ を量子化して得られる相対論的場の量子論では，真空状態とそれに作用して粒子を作り出す演算子と反粒子を作り出す演算子とが，何のアクロバットも必要とせずに自然に定義される．すなわち，$\psi(t,x,y,z)$ 自身が演算子であり，それをディラック方程式の解の完全系で展開した各係数自体が演算子となるのであるが，正エネルギー解の係数は粒子の消滅演算子 b_i，負エネルギー解の係数は反粒子の生成演算子 $d_i^\dagger$ となる．逆に，共役な場 $\bar{\psi}(t,x,y,z)$ の展開係数は，粒子の生成演算子 $b_i^\dagger$ と反粒子の消滅演算子 d_i とからなる．真空状態（これを $|0\rangle$ と表す）は，粒子や反粒子の消滅演算子を作用させると消えるものとして定義され，粒子が1個励起された状態は $b_i^\dagger|0\rangle$，反粒子が1個励起された状態は $d_i^\dagger|0\rangle$ というように与えられる．また，場に対するハミルトニアンの固有値は下に有界であり，真空状態や粒子・反粒子の励起状態のエネルギーが（基準点を適切にとれば）負になることはない．こうして，ディラックの海は，場の量子論における真空へと止揚されたのである．

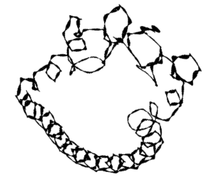
こうなると，確率解釈ができないという理由で捨て去られたクライン–ゴルドン方程式も場の方程式としてなら全く問題のない相対論的方程式である．かくしてボーズ統計に従いスピンを持たない粒子（スカラー場，クライン–ゴルドン場）を記述するものとして復権を遂げたのである．この場合も，複素スカラー場のように電荷を持ち得る場合には，粒子・反粒子が同様に登場する．実スカラー場の場合は，粒子と反粒子の区別はない．

6. おわりに

相対論的場の量子論は，美しい数学的形式と豊かな物理的内容をもっているが，そこへ至る道筋では，あるときは形が先行したり，またあるときは中身が深められたりしながら発展してきた．量子力学を発展させて，相対論の要請に合うような形を探すことからアクロバティックにディラック方程式が得られたが，そこには自然にスピンの自由度が取り込まれていた．さらにその意味する内容を吟味する中から，反粒子の考えに行き着く．そして，それを適切に表現する形式として，相対論的場の量子論が完成されていったのであった．途中段階では，ディラックの海のような柔軟な発想が重要な役割を果たしていた．こういった発展のプロセスは，現在の研究の最前線においても参考になるものである．

（かとう・みつひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

素粒子物理とダイアグラム・経路積分



太田 信義

1. 経路積分

素粒子物理学において，ダイアグラムの果たす役割は非常に大きい．それはファインマンダイアグラムというものによって，素粒子の相互作用の量子論的効果を視覚的かつ効率的に計算できるからである．このことは，アーカイブ[1)]に今年2月24日に発表されている素粒子現象の論文16編中4編がファインマンダイアグラムを含んでおり，その他の論文にもそれが下敷きになっていることからも窺われる（関連した解説として文献2)がある）．

ファインマンはもともと電子と電磁場の相互作用に現れる2つの困難を解決したいと考えていた．第1は電子が自分自身と相互作用するエネルギーを計算すると無限大になること，第2は場が無限にたくさんの自由度を持つことに関連した無限大の困難である．前者は古典論でもある問題である．ファインマンはこれらの困難を，場というものは存在しなくて，電子は他の電子に相互作用するだけと考えて困難を回避しようと考えた．結局はこの考え方は間違っていたが，量子力学の新しい定式化，経路積分というものを生み出し，ファインマンダイアグラムを生むことになったのである．このあたりの事情を，ファインマンのノーベル物理学賞受賞講演からひろってみよう[3)]．

ファインマンは，古典電磁気学において，電子の相互作用をグリーン関数を用いて定式化し，上記の第1の問題を古典論で克服する方法を見出していた．それは，作用積分を用いて表すこともできることに気づいたが，それをいかにして量子論へ移行させるかに頭を悩ませていた．あるとき，「私は... 酒場のパーティに行きました．そこにヨーロッパからやってきたばかりの紳士がいて，私の隣に来てすわりました．ヨーロッパの人々は私どもアメリカ人よりずっとまじめでありまして，頭を使って議論する格好の場所はビア・パーティであると心得ています．で，彼は私の傍らに座ってたずねるのでした．『君は何をしているのかね？』『ビールを飲んでます.』そう答えてから，私は彼が私の仕事について知りたがっているのだと気づき，... 『どうでしょう，作用積分から出発して量子力学をやる方法を何かご存じありませんか？』『いや知りませんな．しかしディラックの論文があって，そこでは少なくともラグランジアンが量子力学に入ってきています.』翌日図書館に行った2人は，ある時刻の波動関数を別の時刻に動かす働きをする積分核が，古典力学のラグランジアンを指数関数の肩にのせたものに似ているというディラックの論文を見た．『似ているといったのは，ディラック先生どういうつもりでしょうかね．似ているということの意味は何ですか？ そんなことといっていったい何の役に立つのでしょう？』彼がいったのは『アメリカ人は困ったものだ．何を見ても使い道ばかり気にして！』私は，ディラックが2つは等しいというつもりだったに違いないと思って，彼にそう申しました．『いやいや』と彼．『等しいなんて

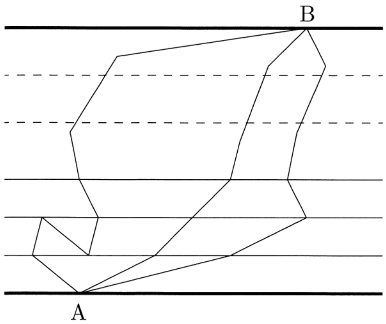


図 1　いろいろな経路.

ディラックはいっていないよ.』『よろしい，もし等しいとしたらどうなるかまあやってみましょう.』と私．最も簡単な例の場合，すぐに比例定数を入れて調整する必要があることがわかりました．計算を実行してみると，シュレディンガー方程式が得られたではありませんか.『この通り，ディラック教授は2つが比例しているというつもりだったのです.』相手の目が飛び出した.『いやいや．これは重大な発見だ．君たちアメリカ人はいつも物の使い方を考える．これは新発見のよい方法だ！』」

こうして，作用積分を用いるとある時刻の波動関数から有限時間後の波動関数を得ることができる方法がわかったが，その形から経路に対する確率振幅という考えが生まれた．図 1 に示したように，粒子が時空のある点 A から別の点 B に行く可能な道をすべて考える．そのそれぞれに確率振幅が付随しており，それはその経路に対応する作用積分に $\frac{i}{\hbar}$ をかけたものを指数関数の肩にのせて与えられる．そして，いろいろな経路から来る振幅を重ね合わせることにより，求める波動関数が得られるのである．この方法は，それまでの量子力学のシュレディンガーやハイゼンベルクのやり方と全く同等な第 3 の方法を与える．これを**経路積分**の方法という．

このように経路積分の方法は，系に含まれる粒子に注目して，その可能なあらゆる経路について定まった重みを与えて加えるのであるが，図 1 に示したように，粒子が時間に沿って逆行するような場合も加える（この図や後のファインマン図では時間は下から上に流れていて，横方向は空間を表す）．これは古典的にはあり得ない過程であるが，量子論では考える必要があり，時間に逆行する粒子は反粒子に対応すると考える．また，これらの過程は仮想的な過程であり，実際に実現するのではなく，それらをすべて加えたものがシュレディンガー方程式を満たす確率振幅を与えるのである．古典的な運動方程式を満たす経路は，作用積分を最小にする経路であるから，その近くを通る経路は古典的な経路と同じような寄与をするのに対し，そこから離れた経路は作用の値が大きく，それから少しでもずれると位相が大きく変動する．そのため，$\hbar$ が小さい古典的な極限では，古典的運動方程式を満たす経路が主な寄与をすることがわかる．このため，経路積分の方法は半古典的近似や，非摂動的効果を調べるのに有効な道具となっている．

2. 量子電気力学とファインマンダイアグラム

ファインマンはこの方法を，前に古典論として構成した電子の相互作用の理論に応用した．ファインマンはいろいろなプロセスにこれを適用して正しい結果が出るように修正していくという非常に発見法的なやり方で正しい方法を得た．図 1 から想像がつくように，電子と光子の時空での運動の様子をダイアグラムで書いて表す方法である．電子と光子だけを含む**量子電気力学**では，図 2 で表される矢印のついた直線と波線で電子と光子が自由に伝播することが表され，光子により電磁相互作用が引き起こされる．その相互作用は図 3 のダイアグラムで表される．相互作用の強さを表すのが，電子の持っている電荷 e である．量子電気力

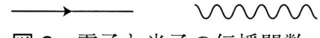


図 2　電子と光子の伝播関数.

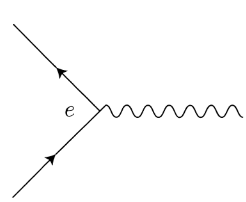


図 3　頂点相互作用.

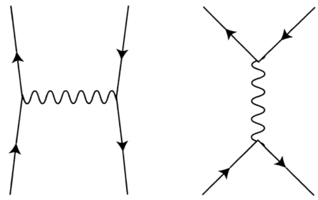


図 4　電子・陽電子の弾性散乱と対消滅・対生成.

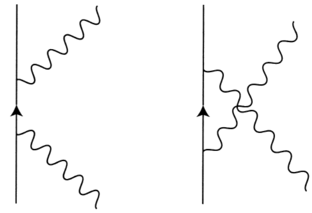


図 5　コンプトン散乱.

学では，相互作用はこの 1 種類しかなく，図 2 と図 3 を組み合わせて，すべての過程を表すことができる．これが**ファインマンダイアグラム**である．

ファインマンダイアグラムは，それ自体図であって式でもある．すなわち，図 2 のそれぞれに伝播関数と呼ばれる関数が対応し，図 3 の頂点があると $-ie\gamma_\mu$ の因子をつけて順番に並べれば，その過程に対応する確率振幅が求まる（γ_μ はディラックのガンマ行列で，$\mu = 0, 1, 2, 3$ が大体光子の偏極に対応する．この 4 つのうち横波に対応する 2 成分だけが物理的に意味のある状態で観測できる）.

電子の矢印は，電荷の流れる方向を表し，それらが逆向きの場合は，陽電子を表すと解釈する．光子は電荷を持たず，反粒子はないので矢印はない．例えば，図 4 は電子と陽電子が弾性散乱する場合と，対消滅して光子になり，それがさらに電子と陽電子を対生成するプロセスを表す（**バーバー散乱**と呼ばれる）．我々に見えるのは，外に出てくる粒子だけなので，このような 2 種類のダイアグラムが対応することに注意が必要である．

光子は偏極を持っていて，それが横を向いている横波だけが物理的な自由度である．一方で光子を表すベクトルポテンシャル A_μ は $\mu = 0, 1, 2, 3$ と 4 つの成分があり，物理的でない自由度も含む．それまでは，横波の物理的な自由度だけを取り出していた．そのためには場を 2 つに分け，横波の部分と縦波の部分を別々に取り扱っていたが，これは座標軸を変えると変わってしまい，見る人の立場で異なって見えることになってしまう．非相対論的な計算では，いろいろな場合をいちいち場合分けしてやるので，非常に煩雑で面倒な計算になる．これに対して，ファインマンの方法は，作用として相対論的に不変なものを採用すれば，すべての自由度を同じように取扱う相対論的な定式化になっているという有利さがある．このため計算が非常に簡単に行えるのである．それは，例えば，光子と電子の散乱であるコンプトン散乱で明らかだ．この過程は図 5 で表されるが，この図に相当する散乱振幅を計算するのに，クラインと仁科は 1 年を要している．これに対し，ファインマンダイアグラムを使えば，1 晩で計算できる．

3. 素粒子物理学におけるダイアグラムの有用性

ファインマンダイアグラムの方法があてはまるのは，量子電気力学に限ったことではない．素粒子の相互作用を相対論的に記述するためには，非相対論的なシュレディンガー方程式的取扱いではうまくいかない．シュレディンガー方程式では，波動関数を用いて粒子の運動を記述するわけであるが，高エネルギーの素粒子反応では，いたるところで素粒子の生成や消滅が起こっている．これを粒子に着目した波動関数を使って記述しようとしても，肝心の粒子がなくなってしまっては記述しようがないわけである．また素粒子どうしの相互作用も，相対論的には瞬時に伝わるのではなく，光の速さ以下の速度で影響が伝播して生じる．これらを記述するためには，電場や磁場のような「場」を考えて，それらの波が伝播して影響を及ぼすと考えるのが自然である．「場」とは，電場や磁場のように空間のいたるところに遍在している量のことである．これらの「場」は，波動方程式に従い，波の性質を持つが，量子力学に従えば，それはすなわち粒子とも考えることができる．この場合に場がどのような役割を果たすかというと，空間の

各点において粒子を生成したり，消滅したりする力を持つのである．それがある点で粒子を消滅し，すぐ隣の点で生成することにより粒子が伝播すると考える．ファインマンダイアグラムは，注目している場合にこの過程を視覚的に表したものと考えることができ，同時にその図から具体的な計算式を読み取ることができるのである．その規則を**ファインマンルール**という．

どのような相対論的場の理論においても，作用を与えればどのようにしてファインマンルールを求めて計算するかはわかっている．例えば，素粒子の強い相互作用を記述するのは，非アーベルゲージ群 $SU(3)$ に基づいた**量子色力学**であると考えられている．これは量子電気力学に似た理論であり，相互作用の大きさを与える電荷に相当するものを**カラー電荷**と呼ぶ．この理論では，相互作用を起こすのが光子ではなく，それ自身カラー電荷を持つ**グルーオン**と呼ばれるボソンが，クォーク間の力を媒介する．それ自身がカラー電荷を持つことにより，グルーオンどうしの間にも力が働く．この理論でもファインマンルールを求め，種々の過程を計算することができる．

ファインマンがこの方法を開発して，それがいかに有効かを確かめた話がやはりノーベル賞講演[3]に語られている．物理学会の講演会で，中性子と電子の相互作用の計算をした結果について疑問が生じたとき，ファインマンはそれを１晩で計算し，その結果より一般的な場合に確かめたのである．翌朝会場で講演者をつかまえて「『ゆうべ計算をしてみたのですが，あなたの答えと合っているかどうか』と尋ねました．すると彼はびっくりして『なんですって？ ゆうべ計算をなさった？ 私は６ヶ月もかかったのですよ．』結果を比べる段になると，彼は私のを見てこう尋ねました．『ここにある Q というのはなんですか．この変数 Q は？』私は答えました．『電子の運動量変化ですよ．電子がいろんな角度に曲がりますから．』彼はまたびっくりして『冗談じゃない．私は Q がゼロになる極限しか計算してありません．』よろしい．私の結果で Q をゼロにおくのは簡単です．それで彼の答えと同じになりました．しかし，彼は運動量変化ゼロの場合だけ計算するのに６ヶ月かかった．私は１晩で任意の運動量変化に対する計算をすませてしまったのです．あのときは感激でした．ノーベル賞をもらったときみたいに胸がわくわくしました.」と述べている．ファインマンダイアグラムの方法が，いかに計算の見通しをよくし，効率的に計算できるようにしてくれるかを見事に物語っている．

4. 発散の問題

ある始状態と終状態を決めたとしても，可能なファインマンダイアグラムは無数にある．簡単な図４のような場合もあるが，もっと複雑なダイアグラムが可能である．与えられたダイアグラムに図３の頂点を付け加え，電子や光子の出ているところを適当につなぎ合わせれば，外に出ている状態は変化せずに新しいファインマンダイアグラムを作ることができるからである．外に出ている電子や光子の状態を**外線**，内部をつないでいる状態を**内線**と呼ぶ．各頂点では運動量の保存則が成り立っている．頂点を付け加える度に，因子 e が付け加わるので，この操作をすると e について高次の寄与を計算することになる．e は小さいので，おおまかな近似としては，e の低い次数のダイアグラムの寄与だけを考えればよい．このようにして，e について低い次数から高次の項を順番に取り入れる方法を，**摂動論**という．

ところがすぐにわかることは，図６に示したように，摂動論のある次数で内線が**ループ**を作るダイアグラムが生じる．ここで重要なことは，外線の運動量が決まっていると，それにつながる内線の運動量も決まっているが，このループの内線をまわる運動量は決まっておらず，いくらでも大きな値を取ることである．この場合，そのすべての値についての和を取らなければならない．それは運動量の積分で与えられるが，それは無限大（**発散**と呼ばれる）を与えるのである．

幸運なことに量子電気力学，あるいはそれを拡

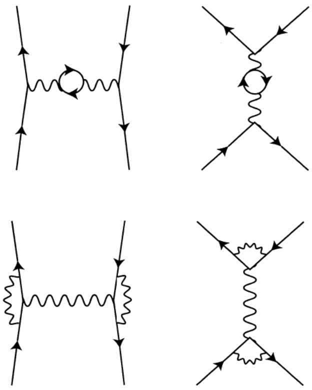


図 6　バーバー散乱へのループ補正.

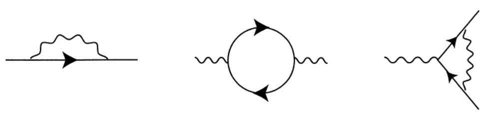


図 7　発散の基本的要素.

張した量子色力学では，このような発散は限られたところにしか現れず，図 7 に示した 3 種類の基本的な要素からなることがわかる．これらは，左から順に，電子の自己エネルギー，光子の自己エネルギー（真空偏極），頂点補正と呼ばれ，発散は電子の質量と波動関数，光子の波動関数，電荷の値に組み入れて見かけ上発散がない形にできる．これを**くりこみ**という．これは量子電気力学を含むゲージ理論と呼ばれる理論では，相互作用の形がたちのよい図 3 などに限られているためであり，素粒子の電弱相互作用もその理論の一種である．

ところが素粒子の残りの相互作用である重力の場合は，重力を媒介する粒子が 1 点で相互作用をする頂点がいくらでも存在する．この場合には，限られた基本的要素だけが発散するのではなく，同じ外線の状態を持つダイアグラムのすべてのものが，摂動の高次を考えれば必ず発散し，その発散をくりこむことはできない．正確に言うと，有限個の量に発散をくりこむことができず，理論は予言可能性を失う．

5. くりこみ群とクォーク

くりこみとは，英語で renormalization という．これは，ファインマンダイアグラムを用いて計算すると量子効果が発散してしまうので，理論の出発点で入れた「裸」の電荷などと量子効果を合わせた結果を実験での測定値に置き換えてしまうことにより「再規格化する」という意味である．この際，実験による測定値は，量子効果により，その測定を行うエネルギーに依存する．その理由は以下のように理解できる．

通常の物質の中に正の電荷を入れると，それに引かれて電子が集まる．その結果，電荷による電場が弱められる．これが偏極と呼ばれる現象である．単純に考えると真空は何もないのだから，このような偏極は起こらず，電場が弱まったりすることはないと考えるであろう．しかし量子力学によると，不確定性原理で許される範囲で，真空には電子陽電子対などが常に対生成，対消滅している（対応するファインマンダイアグラムは図 7 の真ん中のもの）．図 8 に示したように，これらの一方が引き寄せられるために，一定半径内の電荷が弱く見えることになる．この効果は電荷からの距離が大きければ大きいほど大きいので，遠距離，すなわち低エネルギーで測定すればするほど電荷は小さく見える．逆に短い距離（高エネルギー）では大きく見える．これは**真空偏極**と呼ばれる効果である．

ところが，量子色力学の場合には逆に，グルーオンが質量を持っていないために原点に静止していることができず，近くにいけばいくほど，グルーオンはいなくてカラー電荷は小さくなることが発見された．逆にクォークが入っていると，電荷と同じようにカラー電荷を強める方向に働くこともわかっている．これを**漸近自由性**と呼ぶ（自由と

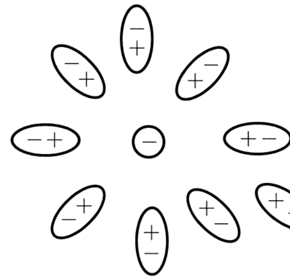


図 8　真空偏極.

は，相互作用しないという意味であり，漸近自由性とは高エネルギーでだんだん相互作用が弱くなるということである）．

以上の効果を系統的に計算できるようにするのが，**くりこみ群の方法**と呼ばれる方法である．理論を定義するのに，あるエネルギースケール μ で結合定数をくりこむとする．くりこみ点 μ の取り方は勝手だが，異なる μ に応じて，異なるくりこまれた結合定数 $g(\mu)$ を用いれば，同じ理論に対応し，物理的結果は同一になる．このように一つの理論でのくりこみ点のエネルギースケール μ とくりこまれた結合定数 $g(\mu)$ との対応を表すのが，くりこみ群方程式と呼ばれる．これによって，量子色力学の漸近自由性が発見された．ただし，漸近自由性はクォークの数が16を越えると上に述べた理由で破れる．この解析の際にも，ファインマンダイアグラムが活躍するのは言うまでもない．

6. 強い相互作用と弦理論

実験的に強い相互作用はこのような性質を持つことがわかっていたので，この結果から強い相互作用の理論が確立することになった．また，高エネルギーすなわち短距離で結合定数が弱くなるということは，低エネルギーすなわち長距離で結合定数が大きくなるということである．現実にはクォークは単独では発見されていないが，それは量子色力学のこの性質により，クォークの間に働く力は長距離では一定になっていて，クォークが**閉じ込め**られるためであると考えられている．その原因は，真空にモノポールが凝縮しているため，カラー電束が絞られひも状になる（電子対の凝縮のため磁束が絞られる**マイスナー効果**の逆という意味で，**双対マイスナー効果**と呼ばれる）ためであるという描像ができている．カラー電荷を持たない状態にはこのような力は働かないので，それらはクォークの集合であっても単独に取り出せる．湯川の予言したパイオンなどの中間子は，クォークと反クォークの束縛状態でカラー電荷はなく，陽子などのバリオンは，クォークが3つ集まった状態でやはりカラー電荷を持たない（量子色力学に用いられる $SU(3)$ 群では，3つのカラーを混ぜるとカラー電荷はなくなることができる．これは異なる3種の光を混ぜると白色（実際には色はついていないがこう呼ばれる）になるのと同じと考えるとわかりやすいであろう）．このため，これらの束縛状態だけが観測されると考えられている．ファインマンダイアグラムがなければ，このような結果を容易には得られなかったであろう．

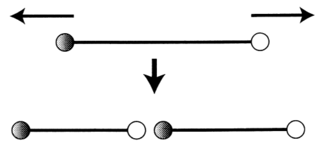


図9 カラー電束によるクォークの閉じ込め．強くひっぱって長くなりすぎると，対生成が起こってクォークは単独で出てこない．

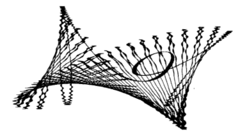
中間子がクォークと反クォークをひもでつないだものであるという描像は，量子色力学が出る前からあった．これはハドロンのひも模型であり，弦理論の原型となった．しかしこれを相対論的に定式化すると，スピンが2の質量を持たない粒子が存在することがわかり，またクォークのダイナミクスは量子色力学で記述されることが確立して，ひも模型は忘れ去られたかに見えた．しかしその後，ひも模型は素粒子の統一理論を与える超弦理論として復活したのである．一方，上記のように量子色力学の中でも，昔のハドロンのひも模型は低エネルギーで有効な描像であると考えられている．ファインマンダイアグラムならずとも，図9はこの辺の事情をわかりやすくしてくれる．

参考文献

1) http://arxiv.org/archive/hep-ph
2) 青木健一：「ファインマン・ダイアグラム」，数理科学 2009年1月号，サイエンス社．
3) R.P. ファインマン（江沢洋訳）：『物理法則はいかにして発見されたか』，ダイアモンド社 (1968)．

（おおた・のぶよし，近畿大学理工学部）

物理研究と記号



風間　洋一

物理学者，とりわけ理論物理学者の日々の研究生活は，広い意味での「記号」との戯れと格闘の連続である．少々大げさだが，記号を制するものは物理を制する，と言ってもよい．うまい記号を用いればものの本質はたちどころに鮮やかなイメージを伴って現出し，自然の深い構造を掌中に捉えることができる．そのような時は，計算は逡巡なく伸びやかに展開し新たな世界が眼前に拓けてくる．そしてガリレオになった気分で「自然という書物は数学の言葉で書かれている」とつぶやいてみたくもなる．一方，へたな記号を用いると，イメージは湧かず，計算の見通しは悪くなり，結果の意味も捉えにくくなる．研究の初期段階ではまだ先が見通せていないため，記号の選択が最適でないことが往々にしてある．途中でそれにうすうす気づきながら，そのまま無理に使って行くと，結局どこかでどうにも気持ちが悪くなり，別の記号で最初からやり直すということになりかねない．

個人差はあるが，物理学者はそれぞれ固有の理解の様式や審美観を持っていて，記号の選択にもそれが現れる．それは実に繊細微妙な世界であり，例えば，添え字にラテン文字 m を用いるかそれに対応するギリシャ文字 μ を用いるかで気分が異なるというようなことがしばしば生ずる．そういう意味で自分と異なる「記号感」を持つ人の論文を読む際には，その人の世界と自分の世界との間に軋轢が生ずる．それを解消する唯一の方法は，その論文を自分の記法で書き直すしかない．

このように，記号の選択は個人の感覚や美意識による部分も多いのだが，無論のこと良い記号にはある程度普遍的なルールがある．最も基本的なルールは，表している実体を容易に想起させる記号を用いること，であろう．これを最も手っ取り早く実現するには，対象の英語名の頭文字を使えば良い．例えば，ニュートンの運動の法則はまず例外なく $F = ma$ と書かれるが，言うまでもなく F は force，m は mass，そして a は acceleration の頭文字である．これを $A = BC$ と表記して A は力，B は質量，C は加速度とことわったとしても全く何のイメージも湧かない．では有名なアインシュタインのエネルギーと質量の等価性を表す $E = mc^2$ はどうだろうか．E と m は良いが，光の速さを表す c という文字は何の略号なのだろうか．実はこれはラテン語で速さを表す celeritas の頭文字である[*1)]．しかしそれを意識して c の文字を使っている物理学者はおそらく誰もいないだろう．もっとわかりにくい例としては，運動量を表すのに頻繁に用いられる p という記号がある．この由来は諸説あるが，定説はないようである．このように，頭文字採用ルールは基本ではあるけれども，絶対ではない．単に皆が何とはなしに慣れてしまい，それ以外の文字を使うと強い違和感を覚えるというだけの理由で支持されている記号もたくさんあるのである．

*1)　英語にも celerity（素早さ）という言葉がある．ちなみに，アインシュタインの論文では L をエネルギーとして L/c^2 が質量に相当することが述べられており，$E = mc^2$ という式は書かれていない．

さて，それでもなるべく頭文字を使うとして，二つの異なる量や操作の英語名が同じ頭文字を持っている場合はどうしたら良いか．ひとつの解決策は，大文字と小文字で区別することである．この例としては，時間 (time) は t で表し，温度 (temperature) は T で表すことが挙げられる．もう一つの解決策は，片方はラテン文字で，もう一方はそれに対応するギリシア文字で表すことであろう．例えば一般の長さ (length) は l で表し，波長 (wave length) には λ を宛てるという具合である*2)．

実は，我々の研究生活における記号の選択がこのような常識的なルールの適用の範囲ですむのならば何も苦労はない．問題は，表したい概念や量の数が，適当なアルファベットの数よりはるかに多いことである．そこで我々はまず文字に装飾を施して種類を増やすことを考える．$\tilde{a}, \hat{a}, a', \ldots$ のような具合である．これでも足りなければ，$a_0, a_1, \ldots$ のように添え字を付けて区別することもよく行われるが，添え字はベクトルやテンソルの成分を表すときにも頻繁に現れるため，しばしば添え字の種類が足りなくなる困難に遭遇する．そもそも，添え字の種類が増えると，どの添え字がどの範囲を走っているかが覚えられなくなるということも起こる．

この添え字に関する問題に対しては，しばしば本質的な簡便化が存在する．多くの場合，添え字はある量を特定の基底で展開したときに生ずる成分を示すものであるから，展開せずに扱うことができればより本質を捉えたすっきりした記述になる．例えば，二つの n 次元ベクトル u, v を正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ で $u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_j v_j e_j$ のように展開したとき，内積は $\sum_i u_i v_i$ と表されるが，これをもともとのベクトル u, v に対する演算として捉えて $u \cdot v$ と書けば，基底の選択に依らないコンパクトな記述となる．

通常はこのように，様々な工夫を用いてどんどん簡略化を進めると，外観がすっきりすると同時に，概念が凝縮されてくる．特に数学者はこのプロセスを極限にまで推し進めようとする．それにより概念の本質が純粋な形で抽出されるからである．しかし，物理の場合には，こうしたコンパクトで美しい記号に罠が潜んでいる場合があるので注意しなければならない．典型的な例として，電磁気学のマックスウェルの方程式系を取り上げて見よう．簡単のため電荷や電流密度がない真空中の場合を考え，電場を $\vec{E}$，磁束密度を $\vec{B}$，光速度を c と記すと，それは次の形をとる：

$$(i)\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (ii)\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(iii)\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (iv)\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

良く知られたように，(i), (ii) は電気力線と磁力線の源である電荷と磁荷の不在を表し，(iii) は電磁誘導の法則を，また (iv) は電場の時間変化による磁場の生成を表す．実はこれらの 4 本の方程式は，微分形式という道具を用いると，$dF = 0, d{*}F = 0$ という見かけ上非常に簡単な 2 本の式で表すことができる．詳しい定義は割愛せざるを得ないが，d および $d*$ はある種の「微分」を F は電場と磁場を相対論的にまとめて記述する量であると思ってもらえば良い．この極度にコンパクトな記法は，数学的にはマックスウェル理論の本質的な構造を明らかにしているが，物理的には逆に物理現象の内容を隠してしまっている．これでマックスウェル理論が内包する豊富な現象を理解することは到底できない．物理にとっては，物理的実体との対応や法則の具体的な発現とその意味を見失わないような記法を用いることが重要なのである．

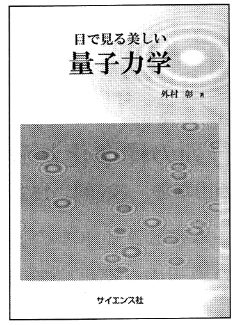
たかが記号，されど記号．記号は研究者の思想と感性が凝縮された繊細な道具であり，我々は日々それを最も有効に使う工夫をしながら研究を行っているのである．

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）

*2) 但し，大学初年時の講義でギリシャ文字を多用すると，学生は慣れていないため心理的な抵抗があり，“It's all Greek to me!”（全くわかりません）ということになりかねない．

目で見る美しい量子力学

外村彰著，A5 判，264 頁＋口絵 32 頁，本体 2800 円，サイエンス社



大学３年のときに受けた量子力学の講義で，梅沢博臣先生が黒板に大きく描いた電子の波は，当時はじかに見ることのできないはずのものであった．「でも見てみたい，工夫をめぐらし，新しい技術を開発する努力を厭わなければ，見えてくるのではないか？」―本書は，この強い思いを持って電子顕微鏡の性能限界に挑み続け，電子を通じて「見えないものを見る」という夢を追求してきた研究者の記録である．

外村氏が日立製作所中央研究所に就職したのは 1965 年のことである．電子ガスのプラズマ振動に関するボーム・パインズの理論を「たった１枚の電子顕微鏡写真で実証した」渡辺宏氏に憧れてのことであった（第３章）．外村氏は，干渉性のよい電子線をはじめとする先端技術を開発することで（第４章），波動関数を視覚化し（第５章），その技術を用いて電子によるヤングの干渉実験（第 6，7 章），アハラノフ・ボーム効果（第 8–10 章），電子線ホログラフィー（第 11 章），超伝導体内部の磁束量子の観測と渦–反渦の対消滅の観測（第 14–18 章）など量子力学の本質的な効果を視覚化することに次々と成功してこられた．本書では，それらの研究における苦労と喜びが生き生きと語られている．

我々が量子力学を学ぶときに戸惑うことは粒子と波動の二重性という概念である．電子は波動関数で記述されるが粒子として観測される．これは何を意味するのだろうか？ ファイマンは「二重スリットの実験は，まさにミステリーであり，古典的には解釈できない．ここに量子力学の真髄がある．しかし，この実験は，スケールが非常に小さいので，そのままの形でおこなうことはできない」と述べたそうである．これを電子を使って実証した外村氏の実験は，いまや世界中の量子力学の授業で紹介されている．粒子性を反映して点としてスクリーン上に観測される電子のイベントを積算すると，統計法則として干渉縞が現れる．この言葉で説明されても釈然としない二重性は第６章と第７章で詳述される外村氏による２重スリットの実験を見ることで有無を言わさぬ迫力で説得させられてしまう．まさに，“Seeing is believing.” である．この実験は，「史上最も美しい実験」の第１位に選ばれている．

磁場が存在しないところにも存在できるベクトルポテンシャルは，昔は，電場と磁場を記述する便宜的な代物とみなされていた．しかし，量子力学ではベクトルポテンシャルがシュレーディンガー方程式の中にじかに現れる．もし，ベクトルポテンシャルが実在するとアハラノフ・ボーム（AB）効果が起こる．AB 効果の発表当時はほとんどの物理学者はその存在に否定的であった．N. ボーアは「電子には力が働いていないので，対応原理が成り立たない」という理由で AB 効果は存在しないと考えたようである．その後も AB 効果の存在は，論争の的であった．外村氏は超伝導体で囲んだドーナツ状磁石を用いて AB 効果が存在することの「完璧な検証実験」（第９章）を行い，この問題に決着をつけた．こうして，ゲージ場の存在が実証された．これもまた電子の波を通じて見えないものを見る美しい実験と言えよう．第 8–10 章では，アハラノフ・ボーム効果の検証の歴史が記述される．

電子の波を通じて「見えないものを見る」（第 19 章），これが外村氏が 50 年近くにわたり追求し続けてきたテーマである．昨年 50 億円の補正予算で始められた「極めつけの電子顕微鏡」プロジェクトでは，原子レベルでのゲージ場の観察が研究目的に据えられている．本書は，すでに功なり名を遂げた外村氏がこの目的のために「他の仕事をすべて断って，もう一度，新しい可能性にチャレンジする」という決意で締めくくられている．

外村氏による一連の実験を見ていると，目で見る量子力学の美しさと不思議さが混在一体となった名状しがたい感覚に見舞われる．本書を読むことで，量子力学やゲージ場の本質について視覚的に学べるだけでなく，研究者の生きざまについてもいろいろと考えさせられ，また，勇気づけられる．この意味で，本書はすべての人にお勧めしたい名著である．

上田 正仁（東京大学大学院理学系研究科）

重点解説 ジョルダン標準形

行列の標準化と分解をめぐって

西山享著，B5 判，152 頁，本体 1905 円，サイエンス社



本書はタイトルの通り行列のジョルダン標準形とその周辺の，高度な線型代数を学ぶための書籍である．講義で用いる教科書というよりも，参考書，独習書といった趣である．ある程度までは線型代数学を学んだ読者を対象としているので，行列の演算とか行列式の性質などには触れられていない．

話は線型写像，線型変換の行列表示といったところから始まる．基底をうまく取ることによって行列表示を見やすいものにする，という基本理念が読み取れる．もっとも易しいタイプは対角行列だ．基底の選び方により対角行列になるもの，すなわち対角化可能な線型変換が第 2 章で詳しく語られる．

すべての正方行列が対角化可能であるならば世の中は平和だ．実際，そうであるかのように読める教科書も散見するが，現実には例えば $(1,2)$ 成分だけが 1 で，他の 3 つの成分がすべて 0 という 2 次の正方行列は対角化できない．また，固有多項式が重根を持たない，すなわち固有値がすべて相異なることは対角化可能の十分条件ではあるが必要条件ではない，という事実もきちんと認識されるべきである．本書にも「注意」と書かれている．

対角化可能でない行列に対する「標準的な標準形」がジョルダン標準形である．基本定理は「すべての線型変換は適当な基底により，ジョルダン標準形として一意的に表示される」というものだ．この定理の証明は大雑把に言って 2 通りある．一つは単因子論によるもの．すっきりとしていて簡明だが，多項式環 $\mathbb{C}[T]$ 上の加群，もう少し一般に，PID 上の有限生成加群の構造定理という，数学科で学ぶ代数学の定食を準備しなければならない．行列の言葉遣いだけでわかりやすく説明するのは至難の業であろう．もう一つの方法は広義固有空間（一般固有空間，準固有空間）の基底を順次積み上げて構成していくものである．アイデアは明解だが，息の長い議論になるので途中で挫折してしまう危険性がある．というわけで一長一短なのだ．本質的に難しいことであり，理解するには多少の苦労はやむを得まい．

評者の学生時代には線型代数学の教科書は今ほど多くはなく，どこの大学でも齋藤正彦[1]か佐武一郎[2]を用いていたのではないだろうか．文献 1) が単因子論，文献 2) が基底の積み上げにより基本定理を証明していた．齋藤氏が後に出版した演習書[3]では「反省し」方法を変更したのは有名な話である．本書では，著者も「まえがき」で断っているように単因子論を全く扱っていない．抽象論ではなく，基底が計算ができるような解説になっており，好感が持てる．なお Jordan cell の訳語について一言コメントしている．

さてジョルダン標準形の基盤は「ジョルダン分解」という行列の分解である．一般に線型代数学において，いやもっと広範な数学の分野においても，行列の分解，あるいは行列のなす群の分解は非常に重要である．本書の後半部分はこの話題に充てられている．岩澤分解，カルタン分解，ブリュア分解，ガウス分解，等々，誰でも一度は耳にしたことのある分解が目白押しだ．著者が書きたかったのはまさにこの部分であり，そしてもちろん著者の本領が遺憾なく発揮されている．一般線型群，すなわち A 型に限っての議論ではあるが，決して易しいわけではないし浅いわけでもない．特に最後の章ではブリュア分解に関連して旗多様体やその上のシューベルト解析にも触れられており，読み応えがある．

著者は「楽しみながら執筆できた」と書いているが，その楽しみは読者にもそのまま伝わる．博学の著者ならではの記述も多く，面白く読める．「随伴」という漢字には違和感を覚えるがこれとても著者のこだわりなのだろう．研究者として，教師として本書を歓迎する．そして数学を学ぶ学生に幅広く薦めたい．無味乾燥という印象を持たれやすい行列だが，こんなにも懐の深い数学が展開できるのだ，ということを本書を通して，この書評を通して伝えたい．

参考文献

1) 齋藤正彦：『線型代数入門』，東京大学出版会，1966.
2) 佐武一郎：『線型代数学』，裳華房，1974（1958 年初版の増補改題）.
3) 齋藤正彦：『線型代数演習』，東京大学出版会，1985.

山田 裕史（岡山大学理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

岡部 靖憲

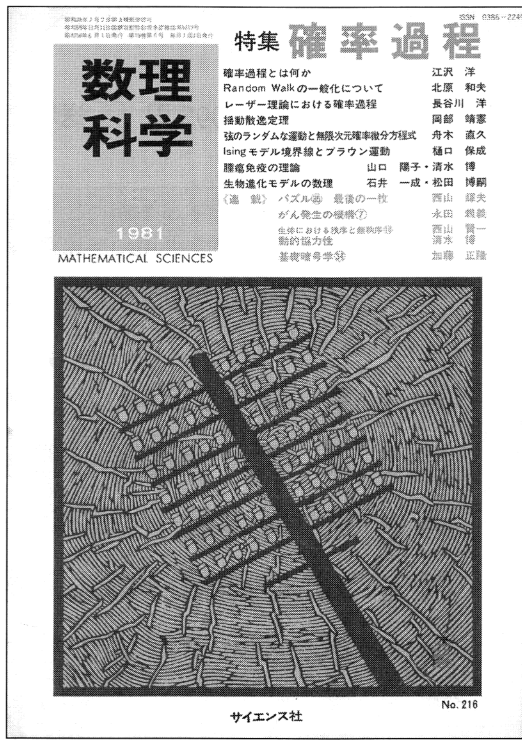
1981年6月号

30年前に書いた表題「揺動散逸定理」を懐かしく思い出す．当時は，公理論的場の理論に現れる定常確率場に要請されたT-正値性の数学的構造を調べるために，T-正値性を満たす定常過程を対象とし，久保亮五・森肇の揺動散逸定理の数学的構造を調べていた．

確率過程の源はEinsteinのブラウン運動で，その時間発展はOrnstein–Uhlenbeckのランジュヴァン方程式で記述され，正規性・定常性・マルコフ性を持ち，相関関数は指数的減衰をしている（1905）．現在の確率過程に対する確率解析の源は，マルコフ性に着目した拡散過程（強マルコフ性と道の連続性）に対する研究で，Kolmogorovによる拡散過程とそれに付随する拡散方程式の研究（1931）と，伊藤清による拡散過程に付随する確率微分方程式の研究，確率微分方程式と拡散方程式を結びつける伊藤の公式の研究（1942）である．

1967年コンピュータシミュレーションで発見されたAlder–Wainwright効果（相関関数の分数冪的減衰）は，ブラウン運動を記述するOrnstein–Uhlenbeckのランジュヴァン方程式をStokes–Boussinesqueのランジュヴァン方程式に修正し，理論的にも実験的にも確かめられた．私は久保氏の論文（1979）を見て，その定常解である定常過程はT-正値性を満たす事に気づき，T-正値性を満たす定常過程に対するKMO-ランジュヴァン方程式論を展開し，揺動散逸定理とAlder–Wainwright効果の数学的構造を解明した（1986）．ノーベル経済学賞を受賞したBlack–Sholesモデルも破綻した（1973, 1998）．

私は数学者も複雑系現象のモデリングの問題に係るべきだと反省し，1988年より，離散時間の確率過程を対象とし，局所的な時間発展を記述するKM_2O-ランジュヴァン方程式論を展開した．さらに，時系列に適用する数学の理論の前提を検証する「実験数学」を提唱し，時系列の奥に潜む非線形構造——定常性・異常性・因果性・決定性・分離性・ダイナミクス・予測——を抽出する時系列の解析技術を開発し，実証研究を行ってきた．



現在，私は，時系列の実証研究によって抽出した時系列の離散的なダイナミクスの奥にある連続系のダイナミクスを導く「KeplerからNewton」的研究を目指し，連続時間の定常過程に対するKM_2O-ランジュヴァン方程式論を構築している．特に，拡散過程に付随する拡散方程式に対応して，定常過程に付随して，時間遅れのある2階楕円型偏微分方程式を導いた．さらに，32年前の論文で得たT-正値性を満たす定常過程に付随するハミルトニアンを用いて，ゼータ関数に対するリーマン予想の「壁」を少しずつこじ開けている．

将来，数学者がKM_2O-ランジュヴァン方程式論に基づく時系列の解析技術をさらに発展させ，複雑系現象の時系列の奥に潜む非線形構造を発見し，ノーベル賞を獲得する研究者が出ることを，私は夢見ている．

（おかべ・やすのり，
明治大学大学院先端数理科学研究科，東京大学名誉教授）

書籍紹介

アート・デザインと科学・文化の関わり

「かたち・機能のデザイン事典」編集にたずさわって

高木　隆司



デザインという行為は，人類が文化を生み出すと同時に始まった．それは，形をつくり，それに機能を負わせることにより，文化に貢献することだと言える．

デザインの始原を表すと思われる興味深い例を１つ紹介しよう．フランス南部のショーヴェ洞窟は，32,000年前に描かれた動物たちの見事な描写と構成で知られている．それよりずっと後のアルタミラ洞窟，ラスコー洞窟の絵画に引けを取らないのである．原始絵画は，最初に最高のものが生まれ，時代とともに単純化されていったらしい．形と機能という観点に立つと，この事実について１つの解釈が見えてくる．ショーヴェ洞窟の絵画よりも後代の人々は，絵画を故意に単純化し，それがもつ機能（宇宙の構造や儀式の方法に関する説明）を鮮明に示そうとしたのかもしれない．ここに，デザイナーの出現を想定することができる．

現代においても，デザインは人々の欲望を満たすよう，製品のかたちを決める．そのとき，デザイナーの個性が顔を出すこともあるが，あくまで大勢の人に好まれることが基本である．一方，アートでは，アーティストが自分の作りたいと思ったものを作るのであり，他人がそれを気に入ったらラッキーである．言い換えれば，人々に愛されるアートから，人々の好みを推定することができる．

デザインは，常に商業戦略と結びつき，国家戦略と関わることもある．良いデザインをいかに生み出すかという問題は，今後ますます重要になるだろう．良いデザインのためには，1：形の数理的な性質，2：伝統文化，3：形の工学的な機能，4：アート（形に関する美的感性）まで，非常に広い分野の知識が必要である．本事典は，これら４分野からデザインに関係する項目を選び，続いてデザイン関係の項目を取り上げるという構成になっている．こうして，デザインに関する総合的な事典がはじめて誕生したと自負している．

私は，本事典の企画について相談を受けたとき，はたして自分に監修の役が勤まるのかという不安があった．しかしながら，次の２つの要因によって，何とかなるさという気になった．１つは，形の科学会という学会に深く関わったおかげで，アート，デザイン，種々の工学，文系の諸分野から友人を得ていて，彼らに編集委員会に参加してもらったことである．２つ目は，2004年から神戸芸術工科大学で，数理的，科学的な体験をアート・デザインにつなげるという主旨の教育を始めたことである．こうして，デザインに親近感をもつことができた．

本事典の編集中は，何かを調べるためだけでなく，見て楽しめるような事典にすることを心がけた．それによって，文化に貢献するというデザイン本来の目的に，本事典がより大きく寄与できると思っている．

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

リレー連載

人物で学ぶ物理

創始者の思考で学ぶ

第3回

ガモフ

トンネル効果とビッグバン

佐藤 文隆

1. ガモフの生きた時代

1968年に亡くなる数年前に，ガモフは自叙伝を書いている．研究でも人生でも，ドラマ仕立ての活劇風物語である．全集にすれば16巻にもなる，ポピュラー・サイエンス本の書き手として，ガモフは有名である．『不思議の国のトムキンス』などのフィクション仕立ての解説本風に自叙伝も書いているのであるが，「事実は小説よりも奇なり」を地で行くような自叙伝である[1)]．

科学者の自叙伝がこういう「嘘のような」物語として進行した時代背景として次の3つがある．第一には1904年ロシア生まれのガモフが青年期に達して遭遇した新生共産主義国家ソ連での学界の変容であり，第二には量子力学誕生直後のヨーロッパ物理学界に直接参加する幸運を得たことであり，第三には，第二次大戦後，原爆開発で絶頂にあったアメリカ物理学界の力強さを背景にその知的魅力の伝道師となったことである．彼はこの3つの時代をスイスイと泳いだのである．

本連載の趣旨は「人物で学ぶ物理」であるので，彼の人生活劇への興味に耽るわけにはいかないが，こういう時代の話に接すると新鮮さを感じる．とくに，近年の日本の大多数の研究者像の“順調な”平々凡々さからは想像もできないことである．研究者を目指すような若い人たちには，研究者像の多彩な可能性に想像力を巡らすためにも，知っておいて損のない物語である．

2. 若いときから悪ふざけ

ガモフが大学に入る頃に，レーニンが指導した革命で帝政ロシアは崩壊し（1917年），巨大な共産主義国家が誕生した．1924年に急逝したレーニンを記念してレニングラードと改名され，帝政時には政治・文化・学術の中心であったサンクトペテルブルグの輝きは徐々に衰えて新首都モスクワへ移っていった．しかし暫くはレニングラードは学術文化の中心であり，能力の認められた若者たちは各地の大学からレニングラード大学に送られてきた．ガモフ，イワネンコ（1904–94），ランダウ（1908–68）たちはみなそういう若者であった．一般相対論で膨張宇宙を導いたフリードマンの相対論の講義をガモフは受講していたが，フリードマンは直後に急逝した．

ガモフもランダウも後に政府からにらまれる立場になるが，その最初の行動は他愛もない若者の悪戯であった．1925年，党編集の「ソ連百科事典」に「エーテルの存在を確認するのがソ連科学者の使命である」と書いてあるのに気づいた．そこでガモフ，ランダウ，ほか3名の若者は，「光エーテ

ルに関するあなたの論文に鼓舞されて，われわれは目下その物質的存在を証明するため熱狂的な努力をしております．アルベルト老人は観念論的白痴です．われわれはカロリックやフロジストンや電気流体の研究にあなたが先頭に立ってくれることを望みます」という嘲笑した絵入りの書簡を当局に送りつけた．革命当初は共産党の支配も学術面には及ばなかったが，スターリン体制が整うにつれて，弁証法的唯物論による指導が次第に強化されつつあった変化を読み損ねた悪戯だった．

この一件では全員いろんな処分を受けた．レーニンの『唯物論と経験批判論』の影響でマッハ的な物理学はご法度で，相対論だけでなく，量子力学成立後も波動力学はOKだが行列力学を公衆相手に語ることは御法度とされ，特にハイゼンベルグとボーアの言説は禁止であった．大人しく学界の中に閉じこもっておれない，ガモフには窮屈なソ連時代が到来していた．

3. トンネル効果：量子力学直後

もともとレニングラードの学者は西ヨーロッパ諸国との交流が盛んであったが，革命後の混乱でルーブルが下落して，交流が経済的に難しくなっていた．そんな中，教授の一人がガモフが数カ月，ドイツでの夏の学校に参加できるように資金獲得に尽力してくれた．できたての量子力学を，レニングラードで，ランダウたちと勉強していたからだろう．こうして，量子力学誕生間もない時期の1928年，ボルンやハイゼンベルグのいるゲッチンゲンに滞在するチャンスが巡ってきた．ゲッチンゲンでの交流でその後の動向を知り，量子力学での原子核の研究に焦点を当てることにした．

電気力のポテンシャルで近寄れないのに，なぜ α 粒子が原子核から出てこれるのか？ この難問にラザフォードが次のような説明をしているのに出会った．「あたかも大きな外洋船を引っぱる2つのタグボートが船を港から引っぱり出すとすぐ離れて」戻るように，ポテンシャルの山を越える間はタグボートのように電子が α 粒子にひっついて中性にして，引っぱり出す，という説明である．

ガモフはこの奇妙な説明に満足できず，すぐに粒子も波動性を持つという波動力学を用いて，ポテンシャルの山を透過する確率を表す簡単な公式を導いた．これで，実験的に知られていた，アルファ粒子のエネルギーが大きいほど短寿命であるというガイガー・ヌッタル関係を説明した．この量子力学のトンネル効果の発見はガーネイとコンドンによってほぼ同時期に独立に発表された．

夏も過ぎ，お金も尽きて帰国せねばならなくなったが，途中，コペンハーゲンに一泊する計画をした．ボーアを研究所に訪ねると秘書から2, 3日待たねばならないと言われた．しかし，「明日帰るんだ」と懇願して面会に成功し，ボーアに最新の研究成果であるトンネル効果を説明した．すると，「奨学金を出すから一年ここに居る気はないか？」と不意に勧誘された．ボーアは一瞬のうちに才能を見抜いたのである．こうして，当時まさに量子物理学の国際的な中心地で研究する幸運が降ってきた．24歳の人生の転換点でもあった．

10カ月のコペンハーゲンの間にケンブリッジにラザフォードを訪ねるなど，各地の研究者と知り合い，ヨーロッパ物理学界の顔になった．それを活かして，次の年に英国で過ごすアメリカの奨学金を得たが，ソ連に溜まっている賃金回収の目的もあって短期間だけ帰国すると，世界的科学者として迎えられた．すぐ10月には英国に移り，続いて一年後から再びコペンハーゲンに滞在し，1931年春，ソ連に帰国した．この間は原子核の研究論文が多いが，ランダウがコペンハーゲンに来たときの「星の内部温度」という共著論文もある．

4. ソ連からアメリカに亡命

帰国してみると，この2,3年でソ連の旅券管理は厳しく様変わりしていた．夏のローマでの会議への出席のために旅券延長を申請すると，モスクワに呼び出されて拒否された．翌年にもアメリカから招待が来たがやはり出国の許可がおりなかった．こういう中でガモフは不法に亡命しようと考えるようになった．

景勝地クリミアの黒海をボートでわたって不法

出国する計画を立てて新婚の妻と一緒にボートの訓練などを始める．そんな亡命作戦に緊張して取り組んでいる最中，1933年のソルベー会議へソ連代表として出席を許可するとの報を受け取った．こうして合法的に出国したが，二度と帰国しない決意であった．出国できたのはボーアがソ連当局に働きかけてくれたからであった．これを裏切った行動をするのでヨーロッパに滞在することはできず，アメリカを目指すことにした．渡航費もないのでボーアとラザフォードに借金をした．このガモフの亡命事件はソ連当局を硬化させ，その後の科学者の交流をほとんど閉ざすようになった．一時帰国したカピッツアなども出国できなくなった．

ガモフの自叙伝によるとアメリカでの35年間の活動は科学研究，軍事顧問活動，通俗科学書の著作の3つだと言っている．1945年の大戦終戦までの時期の科学研究は熱核融合反応（ガモフ・ピーク），星の構造（ニュートリノ放出が星の進化に影響することを最初に指摘した），元素起源（平衡理論の限界）などの多くの論文がある．そして，戦後はビッグバン宇宙，DNA情報など，そのまま通俗科学書の話題にできるものが多い．

ガモフは原爆開発のマンハッタン計画には参加していない．ソ連からの亡命者であり，要注意人物とみなされていたようだ．彼はそれが不満で，戦後になって，陸軍に対抗心を燃やす海軍のほうに（戦前の原爆開発は陸軍の仕事だった），水爆開発を熱心に売り込んだようだ．その縁で海軍の顧問をつとめた．1959年に一度だけ来日している．

5. ビッグバン理論のきっかけ

ガモフがビッグバン宇宙の着想を得たときの歴史は次のようであったという．「1946年1月のアメリカ物理学会のニューヨーク分会のプログラムに，ブルックヘブン国立研究所の故D.J.ヒューズの論文要旨が掲載されていた．原子炉に適した物質を探すために，彼は速い中性子を用いた (n,γ) 過程の断面積を種々の元素について測定した．それによるとおもしろいことに，原子量とこれらの断面積との相関は，原子量とその宇宙における存在量との相関と全く逆になっていた．それゆえ，元素の存在比と (n,γ) 断面積の間の関連が得られたのだ．こうして，長く楽しい共同研究が始まった」これは，当時ガモフの下で研究していたアルファーとハーマンによる「ビッグバン宇宙論の思い出」という文章の一節である[2)]．

ある程度に物理を知らないとこの文章の内容を理解するのは難しいが，ともかく当時の原子力開発の材料研究で得られた原子炉を用いた核物理のデータがガモフにビッグバン宇宙の発端を与えたのである．ガモフがこの核物理のデータと「元素の存在比」を結びつけたことが，着想の発火点であった．ここで存在比とは自然にある物質の元素組成のことである．天文学や地球化学で知られている元素組成を，元素の形成に遡って説明しようとしたのである．軽い元素が中性子を吸収して重い元素になっていく「元素の起源」を思い描いたのである．望遠鏡を覗いている天文学者とは全く違ったイメージの状況でビッグバン理論は産声を上げたのである．

地球の元素組成は形成後に軽い元素や揮発性元素は重力を振り切って蒸発しているから宇宙の平均的組成ではないが，太陽物質は平均的組成に近い．組成の大略は，軽い元素が多く，重い元素が少ない．その差はウランは水素より12桁も少ない．この平均的傾向に加え，鉄あたりの元素が大きくもり上がって多いことが特徴である．

6. 非平衡理論の一例として

元素起源について，初め，温度と結合エネルギーで決まる反応平衡理論が考えられたが，これだと鉄のピークは説明できるが，水素が一番多いという全体的な傾向は説明できない．何か非平衡な反応の状況が必要なのである．1946年当時，元素起源の問題には非平衡過程を宇宙のどんな場面に持ってくるかが問われていた．ガモフは「素早く膨張している宇宙初期」を元素合成の舞台として設定したのである．

ガモフは第二次大戦前には星の中心での熱核融合反応も研究しているから，電荷をもつ核どうし

の反応がトンネル効果のために如何に遅いかを実感していた．元素起源のイメージを大きく変えたのは原子炉からの中性子照射である．中性子反応なら電気的な反発力が働かないから，容易に原子核を太らせることができる．だから初期の物質は全部中性子であると仮定して，それらの一部が陽子に β 崩壊し，それに中性子がついて原子核ができる．β 崩壊と中性子の吸着を繰り返して，次第に重い原子核ができていく．

この中性子の照射吸着過程で彼は元素起源を説明しようとした．大半の中性子は陽子に崩壊して水素になり，残りの中性子を原子核の中に取り込めば「存在比」の大勢は説明できそうである．こういう仕掛けを用意してくれる環境として宇宙の初期が登場するのである．それがビッグバン理論の出発点である[3)]．

ガモフは原始中性子気体をイーレム（ylem）と名付けた．ギリシャ語で原始物質という意味だそうである．

7. ガモフによる宇宙温度の推定

1965 年の発見で宇宙背景放射の黒体温度が約 3 K であると分かったが，ガモフはその二十年近く前にそれを 7 K とか 5 K とか推定していた．どんな理屈がそれを可能にしたかを見てみる．

物理的な要請は「中性子崩壊の寿命程度の時間で核反応が起こる」である．ここで中性子の寿命（約 10 分）と中性子捕獲の断面積という量が登場する．すなわち密度を n，温度 T での熱速度を $v(T)$ として，“要請” は

$$\sigma v(T(10\,分))n(10\,分) \times (10\,分) \sim O(1)$$

である．この式で必要なのは宇宙時刻＝中性子寿命の時の密度 $n(10\,分)$ と温度 $T(10\,分)$ である．ここでガモフ得意の関係式が登場する．それは十分初期では必ず黒体放射のエネルギー密度が優勢になり，温度 T は時間 t で一義的に決まるという関係式である．

放射気体では圧力とエネルギー密度の関係は $P = (1/3)\rho$ で，断熱膨張 $d(\rho V) = -PdV$ では $\rho \propto V^{-4/3}$．一方，膨張宇宙の膨張因子 a として $V \propto a^3$，黒体放射密度 $\rho = g\sigma_B T^4$ だから，$T \propto a^{-1}$ となる．一方，一般相対論から膨張の式

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho.$$

したがって $a^2\dot{a}^2 =$ 一定で，$a \propto t^{1/2}$．これを膨張式に入れて

$$\frac{1}{t^2} = \frac{32\pi}{3}Gg\sigma_B T^4$$

となり，$T(t)$ が決まる．放射係数 σ_B と重力定数 G で決まる．放射係数にはプランク定数が入るから，この関係はプランク単位 T_P と t_P を導入すれば

$$T(t) \sim T_P\left(\frac{t_P}{t}\right)^{1/2}$$

また膨張で核子密度 $n(t)$ は $n \propto a^{-3}$ と減少するから，

$$\frac{T(10\,分)^3}{n(10\,分)} = \frac{T(現在)^3}{n(現在)}$$

ここで，$T(10\,分)$ と $n(10\,分)$ は上の議論で与えられており，$n(現在)$ は銀河密度の天文学の観測情報を使う．こうして，ガモフは現在の背景放射温度 $T(現在)$ を 5〜7 K と推定したのである．

8. $\alpha\beta\gamma$-Hayashi 理論

膨張する中性子気体の中で元素起源が進む．ガモフは初期から熱い気体で考えたが，中性子は崩壊する際にエネルギーを発生するから，低温で始めてもすぐに核反応に必要な高温になるのではないかと考えられる．こういう「修正版」をテラーやパイエルスらが提案している[4)]．ガモフの最初のイーレム説に対するこうした「冷中性子原始物質」説は宇宙背景放射の温度が確定した現在では復活の可能性はない．現在は「なぜ熱い初期状態？」には，グースのインフレーション説が真空の相転移で答えようとしている．

ガモフのイーレム説の重要な修正版が1950 年に日本の林忠四郎により提案された[5)]．ニュートリノの黒体放射が存在しており，このニュートリノ

が媒介する陽子と中性子の間のβ過程反応が無視できないというのがポイントである．ガモフが想定した状態ではニュートリノの黒体放射が直ちに生成されることを示した．このニュートリノを考慮すればある時刻での陽子と中性子の比率（p/n）はガモフ説と定量的に違う．

ニュートリノ黒体放射が必然的に存在するとなると，それも現在の宇宙に残っているはずである．光子の黒体放射が，1965年，宇宙背景放射として発見されているが，林の予想したニュートリノ黒体放射の背景放射はまだ発見されていない．もし，ニュートリノが十分な質量をもてば，それらは重力の見えないソースとして作用する暗黒物質として発見される可能性がある．林修正説は暗黒物質を最初に理論的に予言したものといえる[6]．

放射線のα線，β線，γ線に引っかけて，ガモフ自身は自分の理論を$\alpha\beta\gamma$理論と呼んでいた．アルファーという名の大学院生がいたのにヒントを得てた悪戯である．γはロシア文字ではガモフのガであるが，β君がいないので，核物理の達人であるベーテを勝手に論文の著者に入れて，$\alpha\beta\gamma$というセットを整えたのである．1970年に訪日していたベーテにことの真相を聞いたことがあるが，ガモフが勝手にやったようであった．

ガモフはまた「原始火の玉」説とも呼んでいたが，ビッグバンという名称はほとんど使わなかった．ホイルが命名したものとされている．“big bang”には「うまくいかないことに拘泥せず，全く新たに始める」というような意味があるらしい．ホイルは同じころに提案した定常宇宙論と比較してこう呼んだようだ[7]．

9. ビッグバンと私

ここでガモフのビッグバン宇宙と私との関係について触れておく．1964年11月に基礎物理学研究所で「ニュートリノ天文学」という研究会があった．素粒子の山口嘉夫，宇宙物理の林忠四郎，両教授の主宰であった．このとき，私が宇宙のビッグバン宇宙から予想されるニュートリノの海について総合報告をするよう役目を与えられた．このとき初めて，ガモフらの1946–50年頃の論文と林の1950年の論文をちゃんと読んだ．それからしばらくして，林先生が1950年論文の再計算をして，その陽子と中性子の比率（p/n）をもとにHe形成を計算してみるべきだと言われた．

それには2つの動機があった．He形成の計算はガモフ説で行ったフェルミとターケビッツのものしかなかった．ところが1964年頃，ソ連のある学者が林のp/n比でHe形成を計算したが，中性子の半減期は1950年頃のままになっており，再計算が必要だというものである．もう一つの動機は林グループの星の進化の計算がヘリウム燃焼の巨星段階に達していて分かったことである．星で形成されたヘリウムの大半は炭素以上の重元素になり，宇宙組成比でヘリウムが重元素の一桁大きいことは説明できない．したがって，ヘリウムは星起源ではないということである．

それから一年ぐらいした1965年後半頃に宇宙背景放射の発見が報告された．私はこの発見の報告以前から，林先生の示唆でp/n比とHe核反応の計算を始めていた．むしろアカディミックな問題と考えていたせいもあって，電子計算機の初体験などで手間取っていた．それが，この発見でこの計算は現実味のある宇宙物理の中心問題の一つに変貌した．

我々はこの発見は雑誌で初めて知ったが，この観測的発見に理論解釈を与えたプリンストン大学のピーブルスがこの計算と直ぐにやった．それでこちらはD，Li，Be，Bに核種を拡げて計算したが，核データの本山であるCalTechのWagoner, Fowler, Hoyleの大部な論文と一緒の時期の発表になってしまい，私の論文はかすんでしまった．

10. 宇宙背景放射発見の頃

1965年に報告されたペンジアスとウィルソンによる宇宙背景放射の確認は二十世紀科学の大発見である．この発見は人工衛星による大陸間のテレビ中継技術の開発中の中で起こった偶然の発見であった．マイクロ波の望遠鏡のあるプリンストン大学近くのベル電話研究所の周辺では前から謎の



写真1　1973年のソルベー会議．前から二列目，左からハーマン，一人置いて佐藤，その右アルファー．佐藤の上ホイラー．最前列，右端プリゴジン．

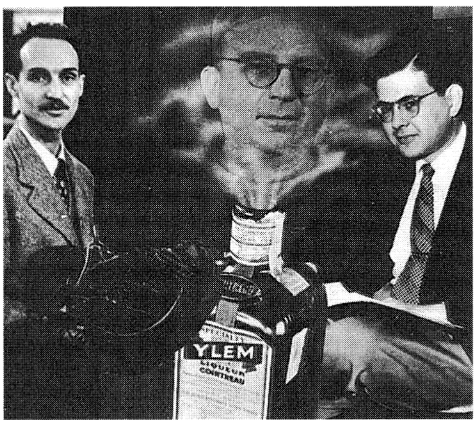


写真2　ガモフのイーレム合成写真（1949年製）．左からハーマン，ガモフ，アルファー．

雑音電波のうわさがあったようだが，日本の我々は雑誌に発表された論文で知った．奇妙なことに，これに合わせて一緒に出版されたプリンストン大学のデイッケらの解釈論文にはガモフらの論文は一切引用されていない．自分たちがビッグバン説を考え出したように述べている．また健在だったガモフは猛然と彼らに抗議した．この様子は文献にくわしい[2]．

1946–50年の間に，ガモフのグループはこのテーマで15編ほどの論文を公表している[8]．しかし，この核反応では炭素より重い元素は作れないことがはっきりし，「元素の起源」問題は星のエネルギー生成や超新星爆発に伴って解明されるという方向に大きく変わった．このために，「元素の起源」を掲げたガモフのビッグバン説は学界の関心事から消えていた．ホイルが定常宇宙論の論文を精力的に書いている時期だった．ガモフ説がいったん消えた間隙をぬうように，デイッケらの歴史を改ざんしようとする動きがあったのである．

ペンジアスとウィルソンは1978年にノーベル賞を受賞に輝いたが，そのときすでにガモフは世を去っていたので彼を含めるかどうかは話題にならなかった．

ガモフらのビッグバンの論文は約15編もある．それらの著者はガモフ，アルファーとハーマンである．私は1973年の宇宙論と一般相対論のソルベー会議に招待されたが，そこにはアルファーとハーマンさんが招待されていた．写真はそのときのものだが，たまたま彼ら二人の近くに私が映っている．ガモフは例の悪戯ごころで1949年に作った「イーレム」合成写真にこの二人も登場している．

アルファーとハーマンは博士号を取った後は各々GEとGMの研究所で働いており，宇宙物理などとは関係ない経歴である．ソルベー会議の招待されたのはガモフの名代ということだったのだろうと思う．

参考文献

1) G. ガモフ『わが世界線＝ガモフ自伝』ガモフ全集13，鎮目恭夫訳，白揚社 (1971).
2) F. ライネス編『ジョージ・ガモフ―その業績と思い出―』山口嘉夫ほか訳，共立出版 (1976).
3) R.A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, *Phys. Rev.*, **73**, 803 (1948).
4) M.G. Mayer and E. Teller, *Phys. Rev.*, **76**, 1226 (1949); R.E. Peierls, K.S. Singni and D. Wore, *Phys. Rev.*, **87**, 46 (1952).
5) C. Hayashi, *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 224 (1950).
6) H. Sato, “Yukawa and Dark Matter” in “Dark Matter in the Universe”, ed. by H. Sato and H. Kodama, Springer (1990).
7) S.G. ブラッシュ，「定常宇宙論の破れた日」，日経サイエンス，1992年10月号.
8) つぎの文献を見よ．R.A. Alpher and R, Herman, *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 153 (1950).

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

リレー連載

人物で学ぶ数学

創始者の思考で学ぶ

第4回

クラインと対称性

浪川　幸彦

1. はじめに

ご依頼を受けたとき，本連載各回の題名は「数学者の名前—数学の分野名」としたいとのことだった．そこでただちに筆者の心に浮かんだ「クライン」に対する対の言葉は「対称性」であった．

彼の数多くの重要な業績の中で，しかしただ一つを選べと言われれば，迷うことなくいわゆる「エルランゲン・プログラム」[1]を挙げる．それはまさに，その後の数学を方向付けるものであった．より正確に言えば，その後の数学の流れを最も的確に指し示すものであった．これが弱冠 23 歳の青年の著作ということに改めて驚かされる．だがおそらく当時この著作の重さは十全には理解されていなかったのではなかろうか？ 人々は（本人を含めて）この著作を，百花繚乱と言えば聞こえはいいが，むしろ混乱の極みにあった様々の幾何学を一つの原理によって見事に統一体系化した画期的な業績としてこれを理解し，実際その理解は当時としては正しかった．だがその後の数学の歴史の歩みは，その原理が幾何学のみならず，数学全体，さらに物理学をも含む領域で妥当することを明らかにしてきたし，またしつつある．その原理がとりもなおさず理論の持つ「対称性」，数学の言葉で言えば「群」の作用の存在なのである*1)．

クラインは，数学を一つの統一的学問，しかも物理学や工学に向かって開かれた体系的学問と見る姿勢を生涯貫き，またそのようなものとして数学を内外に提示し続けた．彼の生涯の視点から見るとき，「エルランゲン・プログラム」はそうした彼の生き様の出発点として位置付けられる*2)．

本稿では，この「エルランゲン・プログラム」に記された考え方を，より容易なユークリッド幾何学の場合に具体的に述べ，それを彼がどう一般化したかという形で説明する．その後，このプログラムの意味について，またその後の発展，特にワイルによるそれについて記そう．

2. ユークリッド幾何学

平面幾何学で考えよう．そこでは，点，直線（線分・半直線），多角形，円といった様々の図形について，その要素（辺や角など）の長さ，角度，あるいは相互の関係（平行，垂直など）を調べる．

ところで，私たちが，図形を考察するときに，最も基本的な前提として，二つの図形が「同じ形」であるとは何かが，明確になっている必要がある．これには「合同」と「相似」の 2 種類があるが，

*1)「対称性」の語は物理でよく用いられる．

*2) この視点から言えば，生涯の終わりに書かれた「講義録：19 世紀数学の発展」[2]とが一対をなす．



F. クライン（1849–1925）.

とりあえず前者について考えよう．普通の辞書で「合同」を引くと，「二つの図形が，重ねると全く一致すること」とある（広辞苑）.

しかし読者諸賢はすでにお気付きのように，上の文言では数学上の「定義」としては不十分で，「どう重ね合わせるか」が明確にされなければならない．そこで数学の辞書を引くと「二つの図形が**合同変換**によって重ね合わされること」とある．大事なのはこの「合同変換」[*3]の明確化なのである.

合同変換の定義の仕方は幾つかあるが，最も簡明なのは「（平面の）変換（全単射）で，長さを変えないもの」であろう．平面の場合，その例として小学校ですでに学ぶものは，「ずらし」（平行移動），「回し」（回転），「折り返し」（鏡映）である．座標を使って表せば

$$(x,\ y) \mapsto (x+e,\ y+f),$$
$$(x,\ y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta),$$
$$(x,\ y) \mapsto (x\cos\theta + y\sin\theta,\ x\sin\theta - y\cos\theta)$$

となる．座標幾何学での基本定理は，逆にすべての平面合同変換はこの形の組合せで書けるというものである．すなわち（少し形を変えて書き直せば）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
$$\text{または} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

と書ける．この行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は直交行列であり，それが「長さを変えない」性質に対応している．すると「角度」も変わらず，互いに垂直な 2 直線はやはり垂直な 2 直線に移り，円は同じ半径の円に移るなど，平面幾何で扱う様々の性質はこれで変換しても変わらない．これが普通の平面ユークリッド幾何学である．

3. アフィン幾何学・射影幾何学

さて，前節の合同変換の式で，行列 A を一般の正則行列にするとどうなるか．このような変換は**アフィン変換**と呼ばれる．このとき直線は直線に移るが，2 直線の角度は一般に保たれない．ただし平行 2 直線はやはり平行 2 直線に移る．すなわち 2 直線が「平行である」という性質はアフィン変換で保たれる．また円は一般に楕円に移るが，（円を含めた）楕円は再び楕円に移る．同様に双曲線は双曲線に，放物線は放物線に移る．つまり 2 次曲線は 2 次曲線にその種類を保って移される．

ここで平面に無限遠直線と無限遠点を加えてこれを「コンパクト化」した**射影平面**を考えると，アフィン変換は**射影変換**として拡張される：

$$(x,\ y) \mapsto \left(\frac{ax+by+e}{gx+hy+i},\ \frac{cx+dy+f}{gx+hy+i} \right).$$

ただし $\begin{vmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$．アフィン変換は $g = h = 0$ の場合に他ならない．

この射影変換によって，直線は直線に，2 次曲線は 2 次曲線に移る．しかもすべての（非退化）2 次曲線は互いに射影変換で移り合う．言い換えれば，そこでは 2 次曲線は 1 種類しかない[*4]．

---

*3）伝統的には「移動」，「運動」の用語も用いられる．

*4）この意味で言うと，アフィン変換の下では，2 次曲線は楕円，双曲線，放物線の 3 種類になる．

表 1 幾何概念の階層構造.

幾何学の種類	その幾何学で不変な概念・性質
射影幾何学	直線，複比，3 直線が 1 点で交わる，3 点が 1 直線上にある，四角形，2 次曲線
アフィン幾何学	内分点（特に中点），2 直線が平行，平行四辺形，楕円（円を含む），双曲線，放物線
ユークリッド幾何学	線分の長さ，2 直線の角度，特に直交，正方形，円（半径）

もう一つ例を挙げよう．最初に述べたように合同変換は線分の「長さ」を変えなかった．アフィン変換は長さを保たないが，同一直線上にある 3 点の「内分比」を変えない．そして射影変換は，同一直線上にある 4 点の「複比」と呼ばれる量を変えない*5)．

4. クラインによる「幾何学」の定義

上を例にとって「エルランゲン・プログラム」でクラインが提示した「幾何学」の定義を説明する．

上に述べた 3 種類の変換は群をなす：

$$G_p = \{ \text{射影変換} \},$$
$$G_a = \{ \text{アフィン変換} \},$$
$$G_c = \{ \text{合同変換} \}.$$

しかもこれらの間には包含関係がある：

$$G_p \supset G_a \supset G_e.$$

射影変換群 G_p は射影平面 P に作用する．アフィン変換群は（部分群として）射影平面 P に作用するが，無限遠直線 L_∞ を保つので，その補集合であるアフィン平面 $H = \{(x, y)\}$ をも保つ．つまり G_a は H に作用する．合同変換群 G_c はアフィン変換群の部分群としてアフィン平面 H に作用する．

クラインは，このように，空間としての集合 **多様体**（Mannigfaltigkeit）V とともに，そこに作用する群 **主群**（Hauptgruppe）G を併せて考え，(G, V) が一つの「幾何学」を定めるとする．そしてその幾何学の一般的課題を次のように述べる（文献 1), p.278）：

「その多様体に属する図形について，その群の変換によって変わらないような性質を研究せよ．」

上の例で言えば，3 種類の変換をとり，各々の変換で不変な性質や図形の分類を考えることで，一般に平面幾何と呼ばれるものの中に 3 種類の幾何学，（狭い意味での）ユークリッド幾何学，アフィン幾何学，射影幾何学があって，それらが 3 層構造をなしていることが分かる（表 1 参照）．

5.「幾何学」と「モデル」の区別

「エルランゲン・プログラム」の最大のポイントは上に述べた「幾何学の定義」の提唱である．「プログラム」ではこれが冒頭に置かれ，その後はこの定義によってどのように当時の様々の幾何学が「統一的に」捉えられるかを具体的に説明している．「統一化」が可能になった理由は二つある．

一つは上に見たように，空間だけでなく，その変換群を併せて考えると，群の包含関係によって諸概念が階層化され，互いに関係付けられた異なる幾何学の下でまとめられることである．

もう一つのより大きな意味は，この定義により「同じ」幾何学とは何かが明確にされることである．すなわち（現代的な言い方をすると）二つの「幾何学」(G, V) と (G', V') において，群の同型 $\alpha : G \to G'$ および多様体の全単射 $f : V \to V'$ が存在し，作用と両立する $(f(g \cdot x) = \alpha(g) \cdot f(x))$ ならばこれらは幾何学として**同型**であり，同じ幾何学の異なる表現（**モデル**）と見なされる．なぜなら両幾何学の諸概念や諸定理の間に完全な対応が成立し，理論として全く同等になるからである．

クラインの説明に詳しく立ち入る必要はないので，現代的な立場から簡単にまとめておこう*6)．

まず上で述べた説明で，私たちは普通のユーク

---

*5) これは射影幾何学における基本定理の一つである．

*6) この辺の事情についての詳細は文献 2) の幾何学関係の記述あるいは文献 1) の解説を参照．

リッド幾何学を座標を用いて座標幾何学として記述するのに何の違和感も抱かないが，これを可能にしたのがクラインによる上記の「定義」なのである．当時は，『原論』以来の公理から積み上げるいわゆる「綜合幾何学」派と座標を用いる「解析幾何学」派とが対立していた．この対立が特に射影幾何学の記述をめぐって一層激しくなっていたのである．クラインは，「健全な発展は両者の方法を活用し，相互に刺激しあった成果を享受するものであろう」（文献 2), p.117）と彼らしい，現在の私たちから見れば当然の意見を述べている．

次に，非ユークリッド幾何学の具体的な「モデル」が射影幾何学の枠内で提示された．これはクライン自身の初期の重要な貢献で，射影変換群の部分群で射影平面内の 2 次曲線を保つ部分群を考えると，その 2 次曲線が実であるか虚であるかによって双曲幾何学および楕円幾何学が得られる．これがいわゆる「クラインモデル」である．単に公理から諸定理を演繹して構築した（構想された）「幾何学」を現実に「存在するもの」として提示して見せたわけである．もっとも双曲幾何学のモデルとしては，計量を変えることで得られるベルトラミのモデルがクラインに先んじ，また普通の角度との等角性が保たれるポアンカレのモデルが後には普通に用いられる[3]．

最後にこの解釈は，公理系に対し，それを満たす「モデル」の構築によって公理系の「無矛盾性」を証明するという道を開いた．そしてまさに「相互に刺激しあった成果」としてヒルベルトは自らの構築したユークリッド幾何学の公理系の無矛盾性を（数体系を基礎に置く）座標幾何学上のモデルの存在によって示した[4]．

6.「プログラム」に至るクラインの歩み

ではクラインはいかにこの「エルランゲン・プログラム」の構想に至ったのか？ 時間軸を遡って，この「プログラム」に至る彼の歩みをたどってみよう．すると華々しく展開する近代数学の流れの中で，その息吹を存分に吸い取った若きクラインがここに至った様子が浮かび上がってくる[*7]．

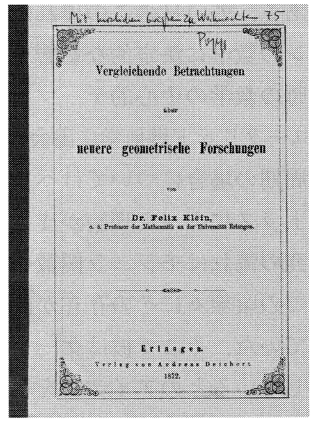


図 1　エルランゲン・プログラム．

6.1 射影幾何学との出会い

彼は 1849 年にデュッセルドルフで生まれ，そこのギムナジウムを終えた後，1865 年ボン大学で学び始め，プリュッカーから実験物理学と直線幾何学を学ぶ．特に後者はプリュッカーが数学研究を再開して構築中のものであった．直線幾何学とは空間内の直線に対して「座標」を決めて，（次元の高い）射影空間内に表現し，「直線の幾何学」を構築しようとするものである[*8]．クラインは学生というより彼の助手として研究そのものに関わる．

1868 年にプリュッカーが死去し，彼の著作をクラインがクレプシュを手伝う形でまとめることとなる．このため彼は 1869 年ゲッチンゲンに赴き秋までをそこで過ごし，クレプシュや M. ネーターを通じて，有理変換論など当時確立しつつあった新たな射影的代数幾何学の息吹に触れたのである．

6.2 ベルリンでの半年

1869 年秋から 1870 年 3 月までの半年（1 学期）を彼はベルリンで過ごす．ここでは彼の数学を拡げる，幾つかの決定的な出会いがあった．

クライン自らが第一に挙げているのは S. リーと

*7)　彼は，公表文献に「足場の跡を残さなかった」ガウスと正反対で，生前に全集を編纂し，そこに論文の意図や成立の経緯，その後の発展などを詳細に自注として加えた．ここでの記述は多くを文献 1) の解説とクーランの追悼演説[9]に負うが，そこでの原資料の大部分は「全集」の注と文献 2) である．

*8)　この理論はプリュッカー座標として一般化され，グラスマン多様体の理論の主要部分となる．

の出会いである．若い日のこの優れた友人との交流はクラインの数学に決定的な影響を及ぼした．

そして当時の数学の中心的テーマであった楕円関数論と非ユークリッド幾何学に出会っている．前者は，固定周期の場合についてはベルリンのヴァイエルシュトラスによって理論がまさに完成の域に達し，研究の流れはモジュラ関数へと移っていた．後者はこの頃徐々にその存在が認められ注目を集め始めていた．そこで彼はケーリーの射影的計量が関連しているとのアイデアを得ている．

もちろんここでクラインは当時のベルリンにおける大御所ヴァイエルシュトラスとクンマーの知遇を得た．もっとも「知遇」というのは，後者はともかく，前者では不適当かもしれない．クライン自ら語るところによれば，ヴァイエルシュトラスのセミナーで上記のアイデアについて話したところ，「2点間の距離は元来，幾何学の基礎に必要な出発点なのだから，直線も2点間を結ぶ最短曲線として定義したいものだ」と言って退けられてしまった（文献1), p.311,「全集」I, p.51）．確かにクラインモデルでは，ユークリッド幾何学での直線と線分の長さがまずあって，そこに複比を使って「(非ユークリッド幾何での）長さ」が導入しなおされるという回りくどさがあり，ヴァイエルシュトラスが気に入らなかったのも無理はない*9)．

6.3 パリでの3カ月—ガロア理論との出会い

1870年4月末から7月半ばまでクラインはリーと共にパリに滞在した．この3カ月は，クラインにとって，そして「エルランゲン・プログラム」にとってさらに決定的なものとなった．すなわちクラインはここでガロア理論と出会ったのである．

若い二人がパリに来たまさにその年1870年にC. ジョルダンの『置換および代数方程式概論』が発刊され，ガロア理論に人々が近付ける道が開けた．と言ってもなお難渋なこの書物に二人は「激しい情熱を持って突進した」（文献9), p.199）．

この段階で彼等が理論自体をどれだけ理解したかは分からないが，少なくともクラインは方程式の解を添加した拡大体での群の作用を考え，その不変式論として方程式論を考えるというガロア理論の本質ははっきりと理解している．

6.4 再びゲッチンゲン，そしてエルランゲンに

1870年秋に罹患したチフスの癒えた1871年春からクラインは再びゲッチンゲンに滞在し，クレプシュを中心にさらに陣容を増した幾何学サークルの中で，幾何学の統一的理解に関わるエルランゲン・プログラムの構想を熟成させていった．

この構想の最後の一押しは，1872年9月から2カ月間のリーの訪問である．リー自身もガロア理論の影響を受け，その微分方程式版を作ろうとして当時その基礎となるべき接触変換の理論を創り上げていた．お互いのアイデアの共通性はいかばかり二人を熱狂させたことであろう．

そして1872年10月からクラインはエルランゲン大学の正教授に招かれる．そこでは当時新任教授に対し公開講演および印刷した「プログラム」の提出が求められていた．これらは自己紹介のようなものであるから，普通は両者のテーマが一致していたのであろうが，クラインは大学教育に関わる就任講演とは別に，この「プログラム」を配付したのである*10)．

7.「エルランゲン・プログラム」の意味

「エルランゲン・プログラム」のアイデアは一言で言えば「ガロア理論の幾何学版」である．

実際クライン自身「プログラム」の最終章「結び」でガロア理論との比較に言及している*11)．

そして「エルランゲン・プログラム」の意味は，このようにガロア理論の考え方，すなわち対称性（群の作用）に注目して，その作用している対象そのものあるいはその性質を不変性として捉える方法論が，方程式論のみならず，より広い数学一般に適用可能であることを指し示したところにある．

*9) 現在私たちはリーマン計量というヴァイエルシュトラスからすれば非常に自然な概念でこれを理解している．

*10) したがって「エルランゲン目録」の訳は誤りである．

*11) さらに主群のある部分変換群と空間（多様体）のある図形に着目し，その図形の部分群で変換された図形全体が自然に新たな幾何学的空間（多様体）を作るとき，それをこの群に対応する**体**と呼んでいる（文献1), p.286）．直線幾何学におけるグラスマン多様体などがそれに当たるだろう．

8.「エルランゲン・プログラム」のその後の発展

だがこれはあくまでも将来何が明らかにされるべきかの「プログラム」であった．したがって「プログラム」には多くの課題が提出されている．そしてその殆どの課題は恐らくクラインの予想を遙かに超える進展を見せたのである．

すでに与えられた紙数が尽きようとしているので，羅列的に概要を語るしかない．

まず，このクラインのプログラムをより完成した形で実現し，より広い場に応用したのはクラインの後任者H. ワイルである．彼の主な業績をたどれば「プログラム」のその後が分かる*12)．

第一に幾何学においては（現代的意味での）「多様体論」が整備され進展し，クラインの大局的立場とヴァイエルシュトラスの局所的立場とが完全に統一された．それはリーマンによるいわゆるリーマン面の理論の確立に始まる．クライン自身の寄与もあるが，それを仕上げたのはワイルであった[5]．

一般の多様体では空間が「曲がっている」場合大局的な対称性が消えてしまう．このため局所的な対称性を考え，それを大域的につなげることを考えなければならない．ここでリーの切りひらいた微分方程式におけるガロア理論が二つの重要な展開を見せる．

一つは群およびその作用そのものを局所化して，その無限小変換を捉えることである．それはリー群およびリー環の理論として確立される．そしてそこでの「不変式論」は「表現論」の形で展開される．ここではE. カルタンの貢献が本質的であるが，結果はワイルの "*Classical Groups*" (1939) にまとめられた．

もう一つは，平行移動の理論の一般化である．ワイルはこれの無限小理論（接続理論）を作った．それをもっと大きな群，すなわち点から点への曲線のなす群を考え（この群の多様体自身への作用は明らか），その作用の接束への持ち上げとして，クライン流の接続の幾何を作って見せたのもE. カルタンである．

この接続の理論は一般相対性理論で本質的役割を果たす．クライン自身常に理論物理学との関連を視野に置いていた．ワイルは冒頭に述べたクライン流のユークリッド幾何学を拡張する形でニュートン力学をガリレイ変換での幾何学・解析学として定式化して見せている[6]．

ここでワイルはさらにクラインの考え方を量子力学にまで及ぼそうとした[7]．この著書は一時期「群ペスト」として悪評を買ったが，現在の場の量子論では，無限次元リー環の表現論という形で理論が構築され，「対称性が理論を決め」ている．

こうしてクラインの「プログラム」は今も前進しつつあるのである．

参考文献

1) クライン，エルランゲン・プログラム，「現代数学の系譜 7」所収，寺阪英孝訳・解説，共立出版，1965，原著：*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert, 1872, 後に注を増補されて「全集」第1巻所収
2) クライン，『19 世紀の数学』，石井省吾・渡辺弘訳，共立出版，1995，原著：*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* I, Springer, 1926.
3) スティルウェル，『数学のあゆみ（下）』，林芳樹訳，朝倉書店，2008.
4) ヒルベルト，幾何学の基礎，「現代数学の系譜 7」所収，寺阪英孝・大西正男訳・解説，共立出版，1965，原著：*Grundlagen der Geometrie*, Springer, 1899ff.
5) ワイル，『リーマン面』，田村二郎訳，岩波書店，1974，原著：*Die Idee der Riemannschen Flächen*, Teubner, 1913.
6) ワイル，『空間・時間・物質』，内山龍雄訳，講談社，1973，原著：*Raum, Zeit, Materie*, Springer, 1918.
7) ワイル，『群論と量子力学』，山内恭彦訳，裳華房，1932，原著：*Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hergel, 1928.
8) ワイル，『シンメトリー』，遠山啓訳，紀伊國屋書店，1970，原著：*Symmetry*, Princeton Univ. Press, 1952.
9) R. Courant, *Felix Klein (Gedächtnisrede)*, Jahresb. DMV, **34** (1925), 197–213.

（なみかわ・ゆきひこ，椙山女学園大学教育学部）

*12）そして名著『シンメトリー』[8]があることも付記したい．

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第17回 —立式で鍛える論理的思考法—

ハイゼンベルク方程式・ディラック方程式

仲　滋文

1. 英雄の登場

ドイツ北西部の海岸から70 km 沖合に，ドイツでは最も日照時間が長く温暖な気候の保養地であるヘルゴランド島がある．18 世紀初頭までは一つの島であったものが，現在では自然の力で分断されて，大小一対の2つの島からなっている．1925 年5月の末，夜明けの大地をがっしりとした体躯のドイツ人の青年が南の突端へ歩いてゆき，海に張り出して立ち上がる岩によじ登って，日の出の瞬間を待っていた．

青年の名はヴェルナー・ハイゼンベルク，ゲッティンゲン大学の教授であるマックス・ボルンの下で助手として原子物理学の本質の解明に奮闘していたが，不愉快な枯草熱のために顔がはれ上がって体調を崩し，ヘルゴランド島で2週間の休暇を過ごしていた．青年は，この島での数日間の研究を通して，原子と光の問題に関わる構想が漠然とした形から数学的に矛盾のない形に変わり，これまで誰もたどり着くことのなかった新しい物理の地に踏み入ったと確信して，湧き上がる感動に駆られて岩壁をよじ登ったのであった．迷路を抜けて，真の量子力学の扉を開いた英雄の登場である．

2. 原子と光の迷宮

原子と光の関わりを明らかにする最初の扉は，プランク（1900）による黒体輻射（＝光）の公式の発見である．プランクは，温度 T の黒体から放射される振動数 ν の輻射のエネルギー密度が

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \underbrace{\frac{h\nu}{e^{kT/h\nu} - 1}}_{\langle \epsilon_\nu \rangle} \tag{1}$$

となることを導き，その手順に含まれる意味から h を作用量子と呼んだ．次いでアインシュタイン（1905）により，振動数 ν の光はエネルギー $h\nu$ の粒子（光子）であることが論じられ[*1]，ミクロの世界における h の役割が次第に明らかになった．

h の世界の本質を解き明かす第2の扉は，原子が光を吸収・放出する条件に結び付ける鍵を使って，1913 年にボーアの原子論により開けられた．水素原子を構成する電子が円軌道を廻るとき，電子のエネルギーは軌道角運動量 l を用いて $E = -\frac{m_e e^4}{2l^2}$ と表せる[*2]．ボーアは，電子が量子条

*1）この言葉で言えば，$\langle \epsilon_\nu \rangle$ は温度 T で熱平衡状態にある光子気体（＝輻射）の平均エネルギーである．

*2）電荷の単位系は，ポテンシャルが $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ となる，cgs-Gauss 単位系を選んでいる．

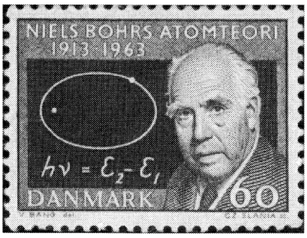


図 1　図柄に，ボーアの振動数条件が書き込まれたデンマークの切手．

件 $l = n\hbar, (n = 1, 2, \cdots)$ を満たし[*3]，エネルギー $E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$ の**定常状態**にあるとき，古典軌道の概念が適用できると考えた．また，原子による振動数 ν の光の吸収・放出は，電子が**振動数条件**

$$h\nu = E_n - E_m \tag{2}$$

を満たす定常状態の間を**遷移**することで生じると解釈した（図 1）．ボーアは (2) からバルマーの線スペクトルの公式を導き，加えて基底状態[*4]は安定であることを宣言して，安定な原子模型の解釈を与えた．

また，(2) で決まる光の振動数を $\nu_{n,m}$ と書くとき，十分大きな $n(> m)$ に対して $\nu_{n,m}$ が電子の回転の振動数 ν_e と $\nu_{n,m} \approx (n-m)\nu_e$ のように結びつくことから，一般に量子数の大きな状態は古典理論に対応する（**対応原理**，1915）と主張した．

さて，ボーア理論に含まれる量子条件 $l = n\hbar$ は，電子の回転方向の運動量 p_ϕ の周回積分 $\oint p_\phi d\phi = nh$ と表せる．ゾンマーフェルト（1915）は，この形を多重周期運動の相変数 (q_i, p_i) に拡張し

$$I_i = \oint p_i dq_i = n_i h, \quad (n_i = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

を要請することにより，手探りの形ではあるが h を古典理論に取り込む**前期量子論**に一歩を進めた．ゾンマーフェルトはこの手法を相対論的補正を含む水素型原子模型に適用し，スペクトル線の微細構造の説明，さらにはゼーマン効果（磁場の下でのスペクトル線の分離）の説明にも成功した（1916）．前期量子論の前進は続き，シュバルツシルド・エプシュタインがシュタルク効果（電場によるスペクトル線の分離）の説明にも成果を得て（1916），ボーアの原子模型と対応原理を含めた前期量子論が，奇跡的な成功を収めているという認識がもたれるようになった．

*3）　ボーアは，最初は量子条件を電子の回転の振動数 ν_e を用いて $E = nh\frac{\nu_e}{2}$ と表し，後に $l = n\hbar$ と同等であることを指摘している．

*4）　ボーアは永久状態と表現した．

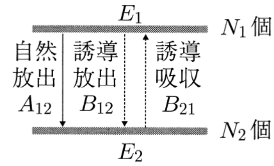


図 2　アインシュタインの誘導放出・吸収．

この当時，アインシュタインは量子化条件 (3) の解釈に関わる先進的な仕事（1917）はあるものの，すでに原子理論の流れとは異なる道を歩んでいた．しかし，1917 年に提唱したプランクの輻射の公式を状態の遷移に基づく光の吸収・放出に結び付ける考え方は，現在まで影響を残すものになった．アインシュタインは，原子が光を放出する仕組みに自然放出と誘導放出があると考え（図 2），エネルギー $E_1, E_2(< E_1)$ の状態にある電子数 N_1, N_2 と温度 T で熱平衡状態にある輻射のエネルギー密度 $u(\nu, T), (\nu = \frac{E_1 - E_2}{h})$ の間に，次のような平衡条件を置いた．

$$N_1 A_{12} + N_2 B_{12} u(\nu, T) = N_2 B_{21} u(\nu, T). \tag{4}$$

ここで，A_{12} は自然放出の確率，また $B_{12}u, B_{21}u$ は誘導放出と吸収の確率である．このとき，温度 T での熱平衡状態のボルツマン因子 $N_i = Ce^{-E_i/kT}$ を仮定すると $u(\nu, T) = A_{12}/(e^{h\nu/kT}B_{21} - B_{12})$ となり，条件 $B_{12} = B_{21}$，および

$$A_{12} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21} \tag{5}$$

の下で，$u(\nu, T)$ はプランクの輻射のエネルギー密度に帰着する．

以上のような成果はあるものの，(3) を基礎とする前期量子論は多重周期運動に対してのみ適用可能であり，これを摂動的の考え方で修正する手法も十分な成功を収めることができなかった．加えて，原子と光のもう一つの接点である分散の問題に対しては，文字通り迷宮に入った感があった．

また，アルカリ金属のスペクトル線に対する微

細構造を説明しようとすると，磁気的量子数は整数の値だけではなく $\frac{1}{2}$ のような値を許す必要が生じた．この半端な量子数を原子の“芯”に押し付ける考え方もあったが，パウリは注意深い分析により半端な磁気的量子数は芯ではなく外殻電子に付加すべきであることを論証し，これに結び付けて排他律（1925）の考え方を打出した．パウリは，半端な量子数に電子の自転（スピン）のような古典的解釈を与えることに反対していたが，やがてガウシュミット–ウーレンベック（1925）が電子のスピンの理論を提唱し，この立場から g 因子も説明される（トーマス，1926）に及んで，パウリ自身がスピン理論の旗手に転向した．

しかし，スピンの自由度の本質的な理解には，ハイゼンベルクとはまた違った資質を持った，もう一人の英雄の登場を待たねばならなかった．

3. 迷走の果て

原子と光の関わりの研究には，スペクトル線の問題の他にも，量子論の立場から“分散”を理解すると言う，もう一つの課題があった．古典電磁気学に基づく分散は，外部からの光が原子の中の電子を揺さぶり，その結果として入射光の振動数に依存する二次的な光が電子から射出されるが，この入–出の関係が原子の屈折率を決定していた．

よく知られているように，振動する外部電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}, (\omega = 2\pi\nu)$ により生成される荷電粒子（分散電子）の電気双極子モーメントは，α を分極率として $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E}$ と書ける．粒子の質量を m，電荷を e とすると，$\boldsymbol{P}$ の運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{P}} + \gamma_0\dot{\boldsymbol{P}} + \omega_0^2\boldsymbol{P} = \frac{e^2}{m}\boldsymbol{E} \tag{6}$$

となる．ここで，$\omega_0 (= 2\pi\nu_0)$ は弾性力による固有（角）振動数であり，γ_0 は散逸効果を表す減衰係数である．(6) は α に関して解くことができ

$$\alpha = \frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0\omega} \tag{7}$$

となる．実質的には γ_0 の大きさは小さく，$\omega \simeq \omega_0$ の近傍を除けば無視できる．原子には，このような振動モードがたくさんあると考え，各原子に含まれる i 番目モードの分散電子の個数を f_i としてすべてのモードを加算すると，原子の分極率が

$$\alpha = \frac{e^2}{m}\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 m}\sum_i \frac{f_i}{\nu_i^2 - \nu^2} \tag{8}$$

の形に得られる*5)．

さて，このような古典的描像と量子論的描像を結ぶ試みは，ラーデンブルク（1922）により着手された．古典電磁気学によれば，3 次元振動子を形成する分散電子が単位時間に輻射により失うエネルギーは $\frac{8\pi^2\nu_0^2 e^2}{mc^3}\langle\epsilon\rangle$ である．ここで，ν_0 は電子の固有振動数であり，また $\langle\epsilon\rangle$ は振動子の力学的エネルギーの時間平均を表す．ラーデンブルクは，まず ν_0 をエネルギー準位間，例えば $E_1 > E_2$ の遷移で放出される光の振動数 ν に，また $\langle\epsilon\rangle$ を振動数 ν の輻射の平均エネルギー $\langle\epsilon_\nu\rangle = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}u_\nu$ に同一視して，N 個の振動子が単位時間に放出する輻射のエネルギーを

$$J_{El} = \frac{\pi e^2}{m}Nu_\nu \tag{9}$$

とおいた．これを誘導吸収（図 2）の意味で原子が吸収する輻射のエネルギー $J_Q = h\nu N_2 B_{21} u_\nu$ と同一視すれば，(5) を使って

$$N = N_2\frac{mc^3}{8\pi^2 e^2\nu^2}A_{12} \tag{10}$$

となる．一般に，状態 i にある原子による分散を考えるときには，$N_2 \to N_i$, $A_{12} \to A_{ki}$, $\nu \to \nu_{ik}$ 等と置き換えて状態間 $E_i < E_k$ の形に改め，(8) の f_i を N/N_i として多原子の系に移行すると，

$$P = \alpha E = \frac{c^3 E}{32\pi^4}\sum_{E_k > E_i}\frac{A_{ki}}{\nu_{ik}^2(\nu_{ik}^2 - \nu^2)} \tag{11}$$

等が結論される．しかし，この場合の分散電子は，かつてのトムソン原子模型を思わせる弾性力の下で輻射の振動数に合わせて振動する“仮想振動子”に近く，ボーア原子模型の軌道電子の描像と素直には調和しない．

1924 年に至って，このような分散理論の理解にさらに混乱の拍車をかけるような，見方によっては新理論の登場を促すような，不思議な“考え方”

*5) α と屈折率 n は，$n^2 - 1 \simeq \alpha$ で結び付く[2)]．

がボーア・クラマース・スレーター (BKS) により提唱された．ボーアたちは，アメリカからグループに参加したスレーターの着想に修正を加えて，対応原理に従って電子の周期運動のフーリエ・モードと結び付く仮想振動子，およびこれを制御する仮想場を設定し，これが他の原子を監視して非因果的かつ確率的に遷移による輻射を誘発するという，因果律を壊し，エネルギー保存則も平均則として捉える立場に立っていた．この考えは，エネルギー・運動量の保存則を前提とする光量子の考え方とも相容れず，大方の反応は冷ややかであり，実験的にもコンプトン効果において因果律が検証されて，理論は破棄せざるを得なくなった．

しかしクラマース自身は，2 カ月後に仮想振動子の立場を一歩進めて，ラーデンブルクの (11) を修正し，状態 i が基底状態でなければ吸収スペクトルだけではなく放出スペクトルも含むべきであるとし，記号を $A_{ki}=A_k^a, A_{ik}=A_k^e$ 等に改め，他の定数を仮想振動の減衰時間 τ_k にまとめた形，

$$P=E\left[\sum_{E_k>E_i}\frac{A_k^a\tau_k^a e^2}{4\pi^2 m}\frac{1}{(\nu_k^{e2}-\nu^2)}-\sum_{E_k<E_i}\frac{A_k^e\tau_k^e e^2}{4\pi^2 m}\frac{1}{(\nu_k^{e2}-\nu^2)}\right] \quad (12)$$

を提唱した．さらにクラマースは 4 カ月後にこの論文への追記の形で，状態間の遷移で定義される振動数 $h\nu=\Delta E$ が，量子数が大きくなるに従い，周期運動のエネルギー H と (3) の作用変数 I_k から定義される $h\nu_k=h\frac{\partial H}{\partial I_k}$ に移行することから，(12) が $\sum_k h\frac{\partial}{\partial I_k}(\cdots)$ 型の微分の離散化に対応することを指摘した．同じ時期，ボルンは摂動論を基に対応原理と離散化則の関係を整備し，分散理論の量子論と古典論の対応が h を含む離散形とその連続極限の対応として理解できることを示して，“量子力学” と言う表現を用いた．

4. ハイゼンベルク方程式

さて，このような時期，ハイゼンベルクはミュンヘン大学のゾンマーフェルトの下で学位を取得後，ゲッチンゲン大学でボルンの厚遇を得て助手となり，1924 年には私講師に昇格していた．ハイゼンベルクはボーアの招きで春休みにコペンハーゲンを訪問し，9 月から正式に留学を楽しむ環境にあった．ここでハイゼンベルクは，分散理論の完成を目指していたクラマースの議論に参加し，自身の次の展開への大きな契機を得ることになった．クラマース・ハイゼンベルクの理論は，BKS 理論の正当化の狙いもあったが，結果的には模型の力学的意味ではなく，これに結びついた観測量の表現に焦点をおくことになった．

1925 年 4 月ハイゼンベルクはゲッチンゲンに戻り，対応原理を基に仮想振動子から正しい輻射の振動数と強度を導く道を探っていた．迷路の中をさまよいながら，量子力学における観測量の表現に焦点を当て，複雑な原子模型を離れて 1 自由度の系の量子力学を調べた．まず古典論では，状態 n にある粒子の位置座表はフーリエモード

$$x_n(t)=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}x_\alpha(n)e^{2\pi i\alpha\nu_n t} \quad (13)$$

に展開できる．量子論では，輻射の振動数は状態間の遷移で $\nu(n,n-\alpha)=\frac{1}{h}(E_n-E_{n-\alpha})$ から決まり，これに合わせて，展開の係数も $x_\alpha(n)\to x(n,n-\alpha)$, ($x(n,n-\alpha)^*=x(n-\alpha,n)$) と書き換えるのが適切であろう．同様に，古典論で x_n に共役な運動量も $p_n(t)=\sum_\alpha p_\alpha(n)e^{2\pi i\alpha\nu_n t}$ と展開され，量子論では x_n と同様の置き換えに従うと考える．この時, n 番目の状態の周期を $T_n={\nu_n}^{-1}$ として，準古典的量子化条件が

$$h=\frac{d}{dn}(nh)=\frac{d}{dn}\int_0^{T_n}p_n(t)\dot{x}_n(t)dt$$
$$=\frac{d}{dn}\sum_\alpha p_\alpha(n)^*\left(2\pi i\alpha\nu_n x_\alpha(n)\right) \quad (14)$$

と書ける．さらに，対応原理に従ったボルンの連続から離散への修正 $\alpha\frac{d}{dn}f(n)\simeq f(n+\alpha)-f(n)$ 等により，上の量子化条件は量子力学的変数の行列としての関係式

$$\frac{h}{2\pi i}=\sum_\alpha\{p(n,n+\alpha)x(n+\alpha,n)$$
$$-x(n,n-\alpha)p(n-\alpha,n)\} \quad (15)$$

に読み替えられる．行列の記号 $\boldsymbol{x} = (x_{nm})$ 等を使えば，$\frac{h}{2\pi i} = (\boldsymbol{px} - \boldsymbol{xp})_{nn}$ である*6)．ハイゼンベルクは (15) を行列要素の拘束条件として使い，$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0$ に従う非調和振動子と回転子のエネルギーを計算し，これとフーリエモードの振動数が近似の範囲で振動数条件を満たすことを確かめた．感動のあまり岩壁によじ登った，その未明のことである．

さて，(15) は，現在正準交換関係と呼ばれている行列方程式の対角成分でしかなく，量子力学的運動方程式としてのハイゼンベルク方程式もまだ登場していない．しかし，ボルンは状態の遷移の情報を担う $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ の積が "**行列**" の積であることを見抜き，この理論の重要性を認識した．ボルンはヨルダンと協力し，正準運動方程式が成り立てば (15) は非対角要素まで正しく，またそうであれば行列としての運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{Hx} - \boldsymbol{xH}), \tag{16}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{Hp} - \boldsymbol{pH}) \tag{17}$$

が導かれることを示した (1925)．現在の量子力学で，ハイゼンベルク方程式として呼ばれている運動方程式である．

5. もう一人の英雄

9月の日曜日の夕方，習慣である独りだけの長い散歩を楽しみながら，フラウワー教授から渡されたハイゼンベルクの論文の本質について，考えるともなく考えているひょろりと背の高いイギリス人の青年がいた．青年は，6月にケンブリッジを訪れたハイゼンベルクの講義にも参加したが，このときは発見直後の新力学は話されなかった．青年は，ハイゼンベルクの論文が思ったより古い理論を引きずっていると感じ，あまり興味を感じなかった．しかし数週間前，この論文の本質は量子変数の $XY(nm) = \sum_k X(nk)Y(km) \neq YX(nm)$ のような**非可換性**にあることに気付き，再び関心を向けたのである．青年の名は P.A.M. ディラック，ブリストル大学で電気工学を修め，若干の曲折はあったものの，奨学金を得てケンブリッジ大学に在籍していた．そしてその散歩の道すがら，突然のように，この非可換性は古典力学のポアソン括弧の類似物ではないかと言う発想が沸き起こったのである．ただ，ポアソン括弧についての知識は曖昧であり，帰宅して確認する必要があった．しかし生憎にも，手持ちの本では詳しいことは分からず，また日曜日のため図書館も閉まっていた．ディラックは，逸る思いにまんじりともせず夜を明かし，翌朝一番に図書館に駆け込んで力学の本を確認すると，まさに思い描いた通りのものが記載されていた．

さて，物理量 X, Y のポアソン括弧 $\{X, Y\}$ は，正準変換の下で不変である．ディラックは，まず古典的な周期運動に対して (15) の右辺が作用変数・角変数の対 (ω_r, J_r) から計算した $\{p_r, q_s\}$ に一致することを確認する．ついで (q_r, p_r) 対を用いて

$$\{q_r, q_s\} = \{p_r, p_s\} = 0, \quad \{q_r, p_s\} = \delta_{rs} \tag{18}$$

となることを確認する．従って，量子と古典の正準変数は $\boldsymbol{p}_r\boldsymbol{q}_s - \boldsymbol{q}_s\boldsymbol{p}_r = \frac{h}{2\pi i}\{p_r, q_s\}$ のように対応し，同様に (16), (17) も古典的な正準運動方程式のポアソン括弧を交換関係に置き換えることにより導かれる．かくして，現在ハイゼンベルク形式と呼ばれている量子力学の形式は完成した．

6. 天才の軌跡

この後，数年間のディラックの活躍は，天才の集中力によって引き出されたアクロバティックな思考の軌跡を見るごとくである．まず，ハイゼンベルクたちとは独立に，量子力学の非可換代数を整備し，背景にあるシュレディンガーの波動関数を認めた上で，行列力学との変換理論，時間に依存するシュレディンガー方程式の定式化を行う．次に，量子力学の形式を場の生成消滅演算子を導

*6) ハイゼンベルクの論文では，p は $m\dot{x}$ として扱われ，独立した行列として扱われていないが，本質は同じである．この形を明記したのは，ボルン–ヨルダンの論文である．

入する形で電磁場に拡張し，原子の中の電子と光の相互作用を論じる（1927）．そして，相対論的な電子の波動方程式の導出*7)である（1928）．この方程式を導出する上で，ディラックは現象と理論の **2 つの鍵**を指摘する．前者は，水素原子のスペクトルを矛盾なく説明するためにガウシュミット–ウーレンベックにより提案され，パウリ–ダーヴィンにより 2 成分の波動関数を用いて量子力学に組み入れられた，電子スピンの概念の重要性である．また後者は，既に相対論的波動方程式として提案されていたクライン–ゴルドン方程式の問題点である．この方程式は，相対論的粒子のエネルギーと運動量の関係 $-p_0^2+\boldsymbol{p}^2+m^2c^2=0$ において，$p_0\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，$p_i\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ の置き換えを行って得られる時間に関する 2 階微分方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0 \qquad (19)$$

であるため，ψ から正定値な確率密度が導かれない．加えて，負エネルギー・正電荷の解が存在する．ディラックは，負エネルギーの問題を別にすれば，スピンの 2 成分の導入と時間微分を 1 階にする問題は，座標とは独立した力学変数（行列）$(\alpha_i, \beta=\alpha_4 mc)$ を導入し，波動方程式を

$$(p_0+\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3+\beta)\psi=0 \quad (20)$$

の形におけば解決できると考えた．ここで $\{\alpha_\mu\}$ は，(20) に $(-p_0+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta)$ を作用させた形がクライン–ゴルドン方程式に帰着するという要請から

$$\alpha_\mu^2=1, \quad \alpha_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu=0 \qquad (21)$$

の解でなくてはならない．ディラックは，$\{\alpha_\mu\}$ が実際にパウリ行列の直積で作れることを示し，新しい相対論的波動方程式を決定した．ディラックはさらに，この方程式を基に電子の正しい磁気能率を導き，水素原子スペクトルの $1/c^2$ 補正がダーヴィンの結果に一致することを示したものの，負エネルギー・正電荷の解の存在からその解釈には慎重であった．当時は，電子と同じ質量を持つ正電荷の粒子が知られておらず，ディラックは 2 カ月後の論文で自身の理論が近似理論である可能性も述べている．次いで 1929 年，ディラックは真空を負エネルギー電子の詰まった状態とする着想の下に，負エネルギー電子が抜けてできるホールを正電荷の粒子とする解釈を提案したが（図 3），未発見と言う**現象**に引きずられた結果，このホールを陽子と示唆する痛恨の誤りを犯したのである．

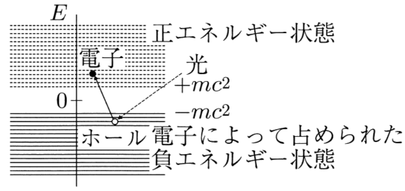


図 3　電子が叩き出された後の，正電荷粒子としてのホール．

1932 年，米国の実験家カール・アンダーソンが，宇宙線粒子の観測から電子と同じ質量をもつ正電荷の粒子「**陽電子**」を発見するに至り，事実は明らかにされた．ディラック方程式は，その理論形式においても概念においても，電子の波動方程式として正しかったのである．

*7)　ソルベー会議の座談の中で，ボーアはディラックに「それはもうクラインにより解決されている」と述べた5)．

参考文献

1)　1〜4 節の全般に関わるものとしては，Sources of Quantum Mechanics; B.L. Van Der Waerden, Dover Publications, Inc., New York; 広重徹『物理学史』，（培風館，新物理学シリーズ 6）；M. ヤンマー『量子力学史』，（小出昭一郎訳，東京図書）；高林武彦『量子力学の発展史』，（中央公論社，自然選書）．

2)　古典的な分散理論については，例えば『ファインマン物理学』（岩波書店，第 II 巻 6 章，第 IV 巻 11 章）．

3)　ハイゼンベルクの評伝としては，例えば小出昭一郎『ハイゼンベルク・人と思想』，（清水書院），デビット・C・キャシディ『不確定性–ハイゼンベルクの科学と生涯』，（金子務 監訳，白揚社）．

4)　ディラックの人物も含めた初期の研究の紹介は，The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933 in Aspects of Quantum Theory（Cambridge Univ. Press, A. Salan-E.OP. Wigner 編）に詳しい．また，日本語に訳されたものでは，『反物質はいかに発見されたか—ディラックの業績と生涯』（藤井昭彦訳，丸善）；特集「ディラック」，数理科学特集号 2007 年 9 月号．

5)　P.A.M. ディラック著，『現代物理学講義』（有馬朗人・松瀬丈浩共訳，培風館）．

（なか・しげふみ，日本大学理工学部）

特　集（2011 年 7 月号予告）

〈隠れた〉物理法則

自然界の真相を探る

本体 952 円

巻頭言	白水　徹也
物理学の対称性の様々な側面	藤川　和男
隠れた定数	辻川　信二
隠された粒子と物質	川崎　雅裕
隠れた次元	橋本　幸士
隠れていた場	向山　信治
隠れた変数	井元　信之
隠れた秩序	川村　光
隠れた位相	村上　修一
［コラム］	佐藤　文隆
［編集部一問一答］	白水　徹也

特　集（2011 年 5 月号）

初学者を悩ます数理の概念

理解のためのヒントを探る

本体 952 円

対談：初学者を悩ます数理の概念	河東　泰之 鈴木　香織
言語としての数学	新井　紀子
微積分	坂井　秀隆
線型空間，線型写像と表現行列	岡田　聡一
ベクトル解析　微積分の進化	森田　茂之
微分方程式	山崎　満
集合　抽象化の道程	松尾　厚
代数学　商対象を中心にして	松本　久義
ルベーグ積分は難しいか？	植田　好道
《連載》　情報幾何の新展開　その 6	甘利　俊一
《現象から方程式を創り出す》　第 16 回	石村　直之
《人物で学ぶ物理》　第 2 回	伊豆山健夫

編集後記

この編集後記を書いているちょうど 1 カ月前，宮城県沖を震源とする東日本大震災が起きました．被災された方々には心より御見舞い申し上げます．

1 カ月たった現在でも復興は進まず，また，原子力発電所の問題もあまり進展がないように思います．本特集号が店頭に並ぶときにはよい方向に進展があることを祈りたいものです．

さて，物理学では様々な数式表現が登場します．こうした数式表記を考えた先人たちの発想には大変驚かされます．一方でそこにひそむ物理イメージは何なのかを考えると例えば巻頭で和達先生が述べられているマクスウェル方程式はなかなか面白く物理イメージと数式表現がつながればより理解が深まるのではないかと思います．

ところで，先ほど触れた原子力発電所の話は，内容が難しく感じられますが，難しく感じる一因として，身近でない単位が何種類も登場することがあげられるのではないでしょうか．こうした単位表記を身近なイメージと結びつけて，よりわかりやすく伝えられる方法はないのかと思います．今回の特集を通じて，私も考えてみたいと思います．　(R)

数　理　科　学　6月号

2011 年 6 月 1 日発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人　木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　© 株式会社 **サイエンス社**　　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁